Somme de variables aléatoires ; cas où les compensations ne l'emportent pas

Michel Valadier

22 mars 2017

L'intérêt de l'auteur pour ces mathématiques a son origine dans le problème "pratique" indiqué dans l'appendice.

La loi de la variable aléatoire réelle U est notée P_U, sa fonction de répartition F_U. On note $(F_U)^{-1}$ l'inverse généralisée de F_U, fonction définie sur $]0,1[$ (appelée aussi *fonction quantile* ; le choix entre continuité à gauche où à droite n'a ici aucune importance). Comme on sait, si l'on considère cette fonction comme une v.a. sur $]0,1[$ muni de la mesure de Lebesgue elle a même loi que U.

Définition Si on a une deuxième v.a. V, on dit que V *stochastically dominates* U si

$$F_U \geq F_V \,. \tag{1}$$

Ceci est une bonne relation d'ordre (de type "balayage", voir [Le, MA, MS] et [DJ, Th.7.2 p.161]) sur les lois des v.a. Même si U et V sont définies sur un même Ω, l'inégalité (1) n'équivaut pas à $[U(\omega) \leq V(\omega)$ presque sûrement$]$ qui est seulement condition suffisante. Et de plus U et V peuvent provenir d'univers différents (Ω_1 pour U et Ω_2 pour V) auquel cas des comparaisons ponctuelles n'ont pas de sens. Mais on peut aussi toujours prendre $\Omega =]0,1[$ (muni de la mesure de Lebesgue), auquel cas nos variables aléatoires deviennent, en choisissant les v.a. croissantes [1], $\tilde{U} = (F_U)^{-1}$ et $\tilde{V} = (F_V)^{-1}$. Alors (1) équivaut à

$$\tilde{U} \leq \tilde{V} \,. \tag{2}$$

Le sens de cette relation d'ordre est que, de façon probabiliste globale (Lehmann dit "on the whole" [Le, quatrième ligne du §2]), V prend de plus grandes valeurs que U.

1. Merci à Guillaume Carlier qui a vu le lien entre mes préoccupations et le réarrangement et à Marco Scarsini qui m'a indiqué [DJ].

Cette relation appliquée aux valeurs absolues semble remonter au moins à 1948 avec Birnbaum dont la définition ([B, p.76]) devient, en la simplifiant, [Y is *more peaked than*[2] Z *if* $\forall t$, $P(|Y| \geq t) \leq P(|Z| \geq t)$]. On peut utiliser la notation $Y \geq^p Z$.

NOTATION Une v.a. réelle est dite SymUn si sa loi admet une densité symétrique unimodale, ce qui équivaut à supposer que sa densité est symétrique sur $\mathbb{R}$ et décroissante sur $[0, +\infty[$.

Théorème *Si X et Y sont des v.a.* SymUn *indépendantes alors $X + Y$ est aussi* SymUn *et*

$$\forall x \geq 0, \quad P_{|X|}([x, +\infty[) \leq P_{|X+Y|}([x, +\infty[)$$

ce qui équivaut à $F_{|X+Y|} \leq F_{|X|}$ ou à $|X + Y| \geq^p |X|$.

Donc $|X + Y|$ stochastically dominates $|X|$. Malgré les aléas (on a des v.a. de signe variable ; en additionnant il y a bien souvent des *compensations*), de façon probabiliste globale, $|X+Y|$ prend de plus grandes valeurs que $|X|$.

La première affirmation a été établie, d'après [La, p.184], par A. Wintner [W, p.30] dès 1938[3]. On retrouve le théorème en appliquant le Th.7.5 de [DJ, p.164] ou le lemme de [B, p.77] ou [S, Th.3]. Il suffit de noter que Y est plus “pointue” que 0 (la v.a. nulle) et d'appliquer le théorème cité à $X \leq^p X$ et $0 \leq^p Y$, ce qui donne $X + 0 \leq^p X + Y$.

Corollaire *Si les X_i sont des v.a. réelles* SymUn *indépendantes et si $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ alors les Sn sont aussi* SymUn *et $\forall n$, $|S_{n+1}|$ stochastically dominates $|S_n|$.*

Démonstration. Évidente. □

Classiquement si les X_i sont i.i.d. et d'ordre 2 d'écart type σ, S_n semble s'éloigner de 0 mais pas trop vite : son écart type est $\sqrt{n}\,\sigma$. Ici ce n'est pas le comportement par trajectoire qui nous intéresse mais la croissance globale de la distance à l'origine.

Appendice

Le bricoleur est souvent confronté au problème pratique suivant : fixer une étagère au mur en posant deux vis ou pitons à une certaine distance (par

2. Il s'agit de grandes valeurs et pas de finesse de pointe.
3. Il paraît que sans la symétrie le produit de convolution de deux densités unimodales n'est pas nécessairement unimodal.

exemple 50 cm) sur une même horizontale. Lorsque l'on marque l'emplacement d'un trou à percer on a, après perçage, une erreur due au guidage à la main de la perceuse et au dérapage du foret sur le béton. Notons X_1 et X_2 (variables aléatoires) les erreurs verticales [4] commises. On peut les supposer indépendantes de même loi P qu'il est naturel de supposer symétrique.

Une première méthode est de percer les deux trous indépendamment, ce qui donne l'erreur (manque d'horizontalité) $X_2 - X_1$ de loi $P * P$ car, grâce à la symétrie, $X_2 - X_1$ et $X_2 + X_1$ ont même loi. En fait ce qui nous intéresse est la loi P_{two} de $|X_2 - X_1|$ qui est l'image de $P * P$ par $x \mapsto |x|$.

Une seconde méthode consiste, après avoir percé le premier trou, à marquer le second (très soigneusement avec un niveau, donc idéalement sans erreur) avec l'intention de le faire à la même hauteur que le premier, puis à percer. L'erreur est alors X_2 de loi P. Ce qui nous intéresse est maintenant la loi P_{one} de $|X_2|$ qui est l'image de P par $x \mapsto |x|$.

D'après le théorème sous l'hypothèse assez naturelle (voir le Lemme ci-après) que X_1 et X_2 sont SymUn les éventuelles compensations qui se produisent avec la première méthode ne l'empêchent pas d'être moins bonne.

Exemple contrariant [5]. Si la loi est $P = \frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$, on a pour $x \in]0, 1]$,

$$P_{\text{one}}([x, +\infty[) = 1 > \frac{1}{2} = P_{\text{two}}([x, +\infty[)\,.$$

En effet on a $P_{\text{one}} = \delta_1$ tandis que $P * P = \frac{1}{4}\delta_{-2} + \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{4}\delta_2$, d'où $P_{\text{two}} = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_2$ et le résultat annoncé. Ce qui numériquement s'énonce : si on fait au perçage une erreur de ± 1 millimètre, avec la première méthode la probabilité de faire une erreur de 1 mm ou plus est égale à $1/2$ tandis qu'avec la deuxième méthode elle est de 1. On peut placer ses espoirs (et préférer cela) dans le fait qu'en faisant deux trous on a $P_{\text{two}}(\{0\}) = \frac{1}{2}$ alors qu'en faisant un seul trou le décalage vertical est toujours en valeur absolu de 1.

La particularité de cet exemple vient de l'absence de masse en 0 pour P, alors que par convolution de la masse apparaît en 0. On peut objecter que l'erreur de perçage suit une loi bidimensionnelle (horizontale et verticale) invariante par rotation ce qui exclut cet exemple.

Lemme *Soit une loi de probabilité sur* $\mathbb{R}^2$ *de densité* $g(x, y) = g_0(r)$ *où* $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ *et* g_0 *est décroissante sur* $[0, +\infty[$. *Alors chaque marginale est symétrique et à densité décroissante sur* $[0, +\infty[$.

4. On ne s'occupe pas pour le moment des erreurs horizontales qui ne se verront pas.
5. R. Pallu de La Barrière proposait de dire au lieu de "contre-exemple", "exemple contraire".

Démonstration. La marginale "verticale" a pour densité

$$y \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} g_0(\sqrt{x^2+y^2})\, dx\,.$$

La symétrie est évidente. Et $0 \le y_1 \le y_2$ implique $\sqrt{x^2+y_1^2} \le \sqrt{x^2+y_2^2}$. L'affirmation de décroissance de l'énoncé en résulte immédiatement. □

Sous l'hypothèse assez naturelle que l'erreur au perçage est comme dans le lemme à densité fonction décroissante de la distance à l'origine, les erreurs verticales sont donc des v.a. SymUn et le corollaire nous dit que [6] $|S_2|$ stochastically dominates $|S_1| = |X_1|$.

Références

[B] Birnbaum, Z.W., *On random variables with comparable peakedness*, Ann. Math. Statistics **19** (1948) 76–81.

[DJ] Dharmadhikari, S. & Joag-Dev, K., *Unimodality, convexity, and applications*, Probability and Mathematical Statistics, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.

[La] Laha, R.G., *On a class of unimodal distributions*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 181–184.

[Le] Lehmann, E.L., *Ordered families of distributions*, Ann. Math. Statist. **26** (1955), 399–419.

[MA] Marshall, Albert W., *Multivariate stochastic orderings and generating cones of functions*, in Stochastic orders and decision under risk (Hamburg, 1989), 231–247, IMS Lecture Notes Monogr. Ser., 19, Inst. Math. Statist., Hayward, CA, 1991.

[MS] Mosler, K. & Scarsini, M., *Some theory of stochastic dominance*, in Stochastic orders and decision under risk (Hamburg, 1989), 261–284, IMS Lecture Notes Monogr. Ser., 19, Inst. Math. Statist., Hayward, CA, 1991.

[S] Shepp, L.A. *Symmetric random walk*, Trans. Amer. Math. Soc. **104** (1962) 144–153.

[W] Wintner, A., *Asymptotic distributions and infinite convolutions*, Edwards Brothers, Ann Arbor, Mich., 1938 (54 pages). (Ce texte a dû être précédé de plusieurs publications sur ce sujet, apparemment dès 1935 ; voir MathSciNet.)

6. Comme déjà dit c'est $|X_1 - X_2|$ qui fait perdre son horizontalité à l'étagère mais $X_1 - X_2$ et $X_1 + X_2$ ont la même loi, à savoir $P * P$.