J'en ai un autre exemplaire !

mathématiques

M. VALADIER

Un problème de dérivabilité

dans L^p

automatique théorique

UNIVERSITÉ DE CAEN - FACULTÉ DES SCIENCES - ESPLANADE DE LA PAIX - CAEN - CALVADOS

UNIVERSITE DE CAEN

FACULTE DES SCIENCES

Laboratoire d'Automatique

Théorique

M. VALADIER

Un problème de dérivabilité dans L^p

Séminaire du 27 Novembre 1964

On utilisera la terminologie probabiliste de Neveu [1]. En particulier 1_A désigne la fonction caractéristique de A.

Soit $(E, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. On ne considérera sur E que des fonctions réelles.

<u>Lemme 1</u> <u>Si f est mesurable</u> $P(\{0 < f \leq a\}) \longrightarrow 0$ <u>quand</u> $a \longrightarrow 0$

C'est un résultat classique des fonctions de répartition que l'on démontre en utilisant la continuité séquentielle de P.

<u>Définition</u> : <u>On dit qu'une partie</u> F <u>de</u> L^1 <u>est équi-continue si</u>

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } P(A) < \eta \text{ entraîne}$$

$$\int_A |f| < \varepsilon \qquad \forall f \in F.$$

On sait (Neveu p. 49) que toute partie majorée en valeur absolue de L^1 est équi-continue.

<u>Lemme 2</u> <u>Soit</u> λ <u>une application mesurable de</u> $[0, \infty]$ <u>dans lui-même telle que</u> $\lim_{x \to \infty} \frac{\lambda(x)}{x} = \infty$ <u>La condition</u> $\sup_{f \in F} \int \lambda(|f|) < \infty$ <u>entraîne que</u> F <u>est équi-continue</u>. (Neveu [1] exercice II-5-2, Séminaire Choquet exposé de Courrège [2])

<u>Démonstration</u>

Soit $M = \sup \int \lambda(|f|)$ et $a > 0$ tel que $x > a \Longrightarrow \frac{\lambda(x)}{x} > \frac{2M}{\varepsilon}$

On a $\int_A |f| = \int_{A \cap \{|f| \leq a\}} |f| + \int_{A \cap \{|f| > a\}} |f|$

$$\leq a\, P(A) + \int_{A \cap \{|f| > a\}} \frac{\varepsilon}{2M} \lambda(|f|)$$

$$\leq a\, P(A) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Il suffit de prendre $P(A) < \frac{\varepsilon}{2a}$ pour que $\int_A |f| < \varepsilon$.

<u>Corollaire</u> <u>Soit</u> p <u>et</u> q $\in [1, \infty|$ <u>avec</u> $p > q$. <u>Si</u> F <u>est une partie bornée de</u> L^p, <u>l'ensemble des</u> $|f|^q$ <u>où</u> $f \in F$ <u>est équi-continu</u>

<u>Demonstration</u>

Si $p = \infty$ c'est trivial. Sinon on remarque que $|f|^p = (|f|^q)^{p/q}$ et on applique le lemme 2 aux $|f|^q$ avec $\lambda(x) = x^{p/q}$.

<u>Théorème</u> 1°) <u>Si</u> p <u>et</u> q $\in [1, \infty]$ <u>avec</u> $p > q$, <u>si</u> $f \in L^p$ <u>et si</u> $\{f = o\}$ <u>est négligeable l'application de</u> L^p <u>dans</u> L^q : $g \dashrightarrow g^+$ <u>est dérivable en</u> f <u>et a pour dérivée</u> $h \dashrightarrow 1_{\{f > o\}} h$

2°) <u>Si</u> $p \in [1, \infty[$ <u>si</u> $f \in L^p$ <u>et si</u> $\{f = o\}$ <u>est négligeable</u> <u>on a dans</u> L^p <u>pour tout</u> $h \in L^p$;

$$\frac{d}{dk} (f + kh)^+ \Big|_{k = o} = 1_{\{f > o\}} h$$

<u>Demonstration</u>

1°) On vérifie que la dérivée annoncée est linéaire et continue. Il suffit de montrer que pour toute suite (h_n), $h_n \neq o$, $h_n \xrightarrow{L^p} o$, la fonction ε_n définie ci-dessous tend vers o dans L^q :

$$(f + h_n)^+ = f^+ + 1_{\{f > o\}} h_n + \varepsilon_n \, \|h_n\|_p$$

Soit $a > o$ et $A = \{o < f \leq a\} \cup \{-a \leq f < o\} \cup \{|h_n| > a\} \cup \{f = o\}$

On voit facilement que

$$\left| (f + h_n)^+ - f^+ - 1_{\{f > o\}} h_n \right| \leq 1_A \, |h_n|$$

$$\text{d'où } \|\varepsilon_n\|_q \leq \left(\int_A \left(\frac{|h_n|}{\|h_n\|_p} \right)^q \right)^{1/q}$$

Or la suite $\dfrac{h_n}{\|h_n\|_p}$ est bornée dans L^p. D'après le corollaire il existe

η tel que P (A) $< \eta$ entraîne $\int_A \left(\frac{|h_n|}{||h_n||_p}\right)^q < \varepsilon^q$ $(\forall n \in \mathbb{N})$ Il existe $a > o$ tel que $P(\{o < f \leq a\}) < \frac{\eta}{3}$ et $P(\{-a \leq f < o\}) < \frac{\eta}{3}$

De plus il existe N tel que $n \geq N$ entraîne $P(\{|h_n| > a\}) < \frac{\eta}{3}$ car h_n converge vers o en probabilité. Il en résulte que

$$n \geq N \Longrightarrow ||\varepsilon_n||_q < \varepsilon$$

2°) Il suffit de montrer la même chose avec

$$(f + k_n h)^+ = f^+ + k_n 1_{\{f > o\}} h + k_n \varepsilon_n$$

On a alors $||\varepsilon_n||_p \leq (\int_A |h|^p)^{1/p}$ et $|h|^p$ appartenant à L^1 est équi-continue.

Ce théorème permet de montrer que l'application de L^p dans $\mathbb{R}$ $g \longrightarrow \int g^+$ a pour dérivée en f : $h \longrightarrow \int_{\{f > o\}} h$ si $p > 1$ et qu'elle est dérivable dans chaque direction pour $p = 1$. Plus généralement si $\mathcal{B}$ est une sous-tribu de $\mathcal{A}$, comme $E^{\mathcal{B}}$ est un projecteur continu de $L^q(E, \mathcal{A}, P)$ sur $L^q(E, \mathcal{B}, P_{\mathcal{B}})$, $g \longrightarrow E^{\mathcal{B}}(g^+)$ a pour dérivée en

$$f : h \longrightarrow E^{\mathcal{B}}(1_{\{f > o\}} h) \text{ si } p > q$$

<u>Contre exemple 1</u> Si $\{f = o\}$ n'est pas négligeable la fonction à valeur dans L^p $(p \neq \infty)$ ou dans L^q $(q < p)$: $k \longrightarrow (f + k 1_{\{f = o\}})^+$ a en o une dérivée à droite $1_{\{f = o\}}$ et une à gauche o.

<u>Contre exemple 2</u> Si $\mathcal{A}/P$ est infinie le 1°) n'est pas vrai en général pour $q = p$. Puisque $\mathcal{A}/P$ est infinie la partie atomique est infinie ou alors la partie non-atomique n'est pas négligeable. De toute façon, il

existe une suite (A_n) telle que $P(A_n) > o$ et $P(A_n) \dashrightarrow o$.

Soit $f = \frac{1}{2} 1_E$ et $h_n = - 1_{A_n}$ Supposons $p \neq \infty$

On a $\left(\frac{1}{2} 1_E - 1_{A_n} \right)^+ = \frac{1}{2} \left(1 - 1_{A_n} \right)$

$$\| 1_{A_n} \|_p = (P(A_n))^{1/p}$$

$$\frac{1}{2} (1 - 1_{A_n}) = \frac{1}{2} - 1_{A_n} + \varepsilon_n (P(A_n))^{1/p}$$

$\varepsilon_n = \frac{1}{2(P(A_n))^{1/p}} 1_{A_n}$ d'où $\| \varepsilon_n \|_p = \frac{1}{2}$

<u>Contre exemple 3</u> Si $p = \infty$ le 2°) n'est pas vrai et a fortiori le 1°) pour $p = q = \infty$. On peut supposer que les A_n forment une partition de E

Soit $f = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} 1_{A_i}$ et $h_n = - \frac{1}{n} 1_E$

On a $(f + h_n)^+ = \sum_{i=1}^{n-1} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{n} \right) 1_{A_i}$

D'où $\varepsilon_n \| h_n \|_\infty = \sum_{n+1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{i} \right) 1_{A_i}$

d'où $\frac{1}{n} \| \varepsilon_n \|_\infty = \frac{1}{n}$

Bibliographie

[1] NEVEU : Bases mathematiques du calcul des probabilités (Masson)

[2] CHOQUET : Séminaire 1ère année 1962 Initiation à l'analyse.