N° d'enregistrement
au C.N.R.S.
A O 4068

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES MATHEMATIQUES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES DE PARIS

par

Michel VALADIER

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR ES-SCIENCES

Sujet de la Thèse : CONTRIBUTION A L'ANALYSE CONVEXE

soutenue le décembre 1970 devant la Commission d'Examen

MM. G. CHOQUET — Président

R. PALLU DE LA BARRIERE
P. MALLIAVIN
J.J. MOREAU
} Examinateurs

Université de Montpellier
Secrétariat des Mathématiques
Publication n° 92

INTRODUCTION

Le but de ce travail est d'étudier les multi-applicatione à valeurs convexes compactes (ch. 1) et la sous-différentiabilité de certaines fonctions convexes (ch. 2). Une partie des résultats ont été annoncés dans deux notes aux Comptes Rendus (cf. La bibliographie) et le chapitre 1 est à paraître dans le Journal de Mathématiques pures et appliquées.

Dans le chapitre O on donne quelques résultats issus en grande partie des travaux de Castaing (et Debreu). Il s'agit : soit d'améliorations d'énoncés de Castaing, soit de théorèmes qui seront utilisés dans les chapitres 1 et 2, soit d'énoncés utiles pour la compréhension du chapitre O lui-même. Nous n'avons pas donné les démonstrations qui se trouvent dans la littérature.

Dans le chapitre 1 § 1, on étudie la mesurabilité d'un maximum lexicographique (question abordée par Wasewski, Filippov, Richter, Kellerer, Olech, Kudo, Castaing, etc). Ce résultat permet d'établir un "théorème de Choquet paramétrique" (§ 2), et d'étendre le théorème de Richter-Kellerer en dimension infinie (§ 5).

On donne une extension du théorème de Strassen (§ 4 th. 19) qui permet de donner des résultats sur l'intégration des multi-applications (étudiée déjà par Aumann, Debreu, Castaing). Dans le § 6 on établit un théorème de Lebesgue-Nikodym pour les multi-applications (résultat obtenu aussi par Debreu-Schmeidler).

Le § 3 montre en particulier ceci : étant donné une multi-application Σ par forcément mesurable, il existe une multi-application mesurable qui admet (à l'égalité p.p. près) les mêmes sections μ-mesurables que Σ.

Enfin le § 7 examine le rapport entre continuité ou semi-continuité d'une multi-application et la continuité ou semi-continuité de sa fonction d'appui (problème résolu par Castaing pour la semi-continuité supérieure).

Le chapitre 2 est presque entièrement indépendant du chapitre 1. Seul le § 3, qui étudie la sous-différentiabilité d'une intégrale de fonctions convexes, est une application du théorème 1.19 (th. de Strassen). Cette question avait été abordée par Gol'stein et Levin. Dans le § 1 on étend deux théorèmes de Moreau sur la sous-différentiabilité aux fonctions convexes à valeurs vectorielles (question abordée par Raffin dans le cas R^I). Le § 2 étend en dimension infinie un résultat sur la tangence au sens de Fréchet de la fonction des dérivées directionnelles. Les § 4 et 5 étendent des résultats de Pshenichniy sur le sous-différentiel d'une borne supérieure de fonctions convexes. On donne aussi un résultat qui nous a été communiqué par Rockafellar (th. 2.15).

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à M. PALLU DE LA BARRIERE qui m'a initié à la recherche, et dont les conseils et les encouragements me furent une aide précieuse.

Je remercie M. CHOQUET de l'intérêt qu'il a porté à ce travail, et qui m'a fait l'honneur de présider le jury.

J'adresse mes remerciements à M. MALLIAVIN pour le très intéressant second sujet qu'il m'a proposé.

Je désire également remercier M. MOREAU qui a bien voulu faire partie du jury.

J'exprime toute ma reconnaissance à M. CASTAING pour les échanges fructueux que nous avons eu pendant la préparation de ce travail.

Je remercie le C.N.R.S. qui m'a fait vivre pendant l'année scolaire 69-70, et l'I.R.I.A qui m'a hébergé.

Enfin je remercie le secretariat de Mathématiques de la Faculté des Sciences de Montpellier pour la réalisation matérielle de ce fascicule.

SOMMAIRE

CHAPITRE O

RAPPELS.

§ 1 . THEOREMES DE SECTIONS MESURABLES

Il sera beaucoup question de multi-applications. Etant donné deux ensembles E et F , on appelle multi-application de E dans F (et on s'efforce de la noter Γ) , une application de E dans $\mathcal{P}(F)$ il est équivalent de se donner une partie de Ex F , qui est alors aappelée graphe de Γ , et identique à $\{(x, y) | y \in \Gamma(x)\}$. Au lieu de dire que Γ est une multi-application de E dans F , on considère parfois une partie $\mathcal{a}$ de $\mathcal{P}(F)$, et on dit que Γ est une multi-application de E dans $\mathcal{a}$, si pour tout $x \in E$ $\Gamma(x) \in \mathcal{a}$.
Des termes synonymes de multi-application sont "fonction multivoque" (cf BERGE), l'anglais "set valued function" et "correspondance" (utilisé par Bourbaki en théorie des ensembles et repris par DEBREU).

On appelle section d'une multi-application Γ de E dans F , une application σ , de E dans F , telle que , pour tout $x \in E$, $\sigma(x) \in \Gamma(x)$. Si σ est une section de Γ , l'application $x \mapsto (x,\sigma(x)$ est une section de la surjection qu'est la projection du graphe de Γ sur E . Par ailleurs si $\varphi : F \to E$ est une surjection, une section de φ est aussi bien une section de la multi-application $x \mapsto \varphi^{-1}(x)$.

Nous nous efforçons d'énoncer le plus de résultats possibles dans le cadre de la mesurabilité abstraite. On appellera, avec MEYER, espace mesurable , $(\Omega, \mathcal{a})$ un ensemble Ω muni d'une tribu $\mathcal{a}$.

O.1 LEMME.

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable, E un espace métrisable et Γ une multi-application de Ω dans E

1) Si $\Gamma^{-}(F) = \{\omega | \Gamma(\omega) \cap F \neq \phi\} \in \mathcal{A}$ pour tout fermé F, alors $\Gamma^{-}(U) \in \mathcal{A}$ pour tout ouvert U.

2) Si E est séparable (*), si $\mathcal{B}$ est une base de la topologie de E et si pour tout $B \in \mathcal{B}$, $\Gamma^{-}(B) \in \mathcal{A}$, alors $\Gamma^{-}(U) \in \mathcal{A}$ pour tout ouvert U.

Démonstration :

1) C'est le lemme 1.3 de CASTAING [5]. On pourrait supposer, au lieu de E métrisable, que tout ouvert est F_σ.

2) On utilise le fait que $\Gamma^{-}(UB_i) = U\,\Gamma^{-}(B_i)$, et que E est de Lindelöf (au sens de SCHWARTZ, E est de Lindelöf si toute famille d'ouverts contient une sous famille dénombrable qui a même réunion). Ici tout ouvert U est union dénombrable d'éléments de $\mathcal{B}$.

O.2 COROLLAIRE.

Si E est métrisable séparable les relations suivantes sont équivalentes :

a) $\Gamma^{-}(U) \in \mathcal{A}$, pour tout ouvert U.

b) $\omega \mapsto d(x, \Gamma(\omega))$ est mesurable, pour tout $x \in E$.

Démonstration :

Pour $r > 0$ et $x \in E$ l'ensemble $\{\omega | d(x, \Gamma(\omega)) < r\}$ est identique à $\Gamma^{-}(B(x, r))$, $B(x, r)$ étant la boule ouverte de centre x,

(*) Ce que Bourbaki appelle de type dénombrable.

de rayon r . Cela prouve $a \Longrightarrow b$.

Réciproquement, les boules ouvertes formant une base de la topologie de E , le 2) du lemme montre que $b \Longrightarrow a$.

REMARQUE.

Ce corollaire étend en partie le th. 3.2 de CASTAING [5]

0.3 THEOREME.

Soit $(\Omega, \mathcal{Q})$ un espace mesurable, E un espace métrisable séparable et Γ une multi-application de Ω dans les parties complètes non vides de E . Les relations suivantes sont équivalentes

a) $\Gamma^{-}(U) \in \mathcal{Q}$, pour tout ouvert U ,

b) Γ admet une famille dénombrable de sections mesurables denses (σ_i) (i.e. pour tout ω l'ensemble des $\sigma_i(\omega)$ est dense dans $\Gamma(\omega)$).

Démonstration :

1) Montrons $b \Longrightarrow a$. Cela résulte de l'égalité $\Gamma^{-}(U) = \bigcup_i \sigma_i^{-1}(U)$. Cette implication ne fait pas intervenir le fait que les $\Gamma(\omega)$ sont complets.

2) L'existence d'une section mesurable résulte de KURATOWSKI-RYLL NARDZEWSKI (*) . Montrons l'existence d'une famille dénombrable de sections denses. Pour cela soit (x_n) une suite dense dans E et $B(x_n, 2^{-i})$ la boule ouverte de centre x_n, de rayon 2^{-i}. On considère les multi-applications Γ_{ni} définies par

$$\Gamma_{ni}(\omega) = \begin{cases} \Gamma(\omega) \cap B(x_n, 2^{-i}) & \text{si } \omega \in \Gamma^{-}(B(x_n, 2^{-i})) \\ \Gamma(\omega) & \text{sinon.} \end{cases}$$

(*) Cf. également ROHLIN lemme 2 p. 198 (cette référence m'a été signalée par Ch. CASTAING).

Pour tout ouvert U , on a $\Gamma^{-}_{ni}(U) \in \mathcal{A}$ car $U \cap B(x_n, 2^{-i})$ est ouvert. Par ailleurs, (en désignant par $\overline{\Gamma}_{ni}$ la multi-application $\omega \mapsto \overline{\Gamma_{ni}(\omega)}$) , on a $\overline{\Gamma}^{-}_{ni}(U) = \Gamma^{-}_{ni}(U)$. Comme $\overline{\Gamma}_{ni}(\omega)$ est complet et non vide , $\overline{\Gamma}_{ni}$ admet une section mesurable σ_{ni} . Les sections $(\sigma_{ni})_{(n,i) \in \mathbb{N}^2}$ sont denses. En effet, pour un ω et x tels que $x \in \Gamma(\omega)$ et $\varepsilon > 0$, soit i et n tels que $2^{-i} < \frac{\varepsilon}{2}$ et $d(x_n, x) < 2^{-i}$. Alors $\omega \in \Gamma^{-}(B(x_n, 2^{-i}))$, et $d(\sigma_{ni}(\omega), x) < \varepsilon$ car $\overline{\Gamma}_{ni}(\omega)$ est contenu dans la boule fermée $B_f(x_n, 2^{-i})$.

<u>REMARQUE.</u>

Ce résultat est un peu plus fort que th. 5.4. de CASTAING [5]. La démonstration est inspirée des th. 5.3 et 5.4 de CASTAING.

0.4 <u>COROLLAIRE.</u>

<u>Le théorème 3 reste vrai</u>

1) <u>Si</u> Γ <u>est à valeurs dans les parties fermées non vides d'un espace polonais</u>,

2) <u>Si</u> Γ <u>est à valeurs dans les parties compactes non vides d'un espace métrisable séparable.</u>

<u>Démonstration.</u>

1) Il suffit de munir E d'une distance d'espace métrique complet, compatible avec sa topologie, pour être ramené au théorème.

2) On met sur E une distance compatible avec sa topologie, et cela ramène au théorème puisque les compacts sont complets.

0.5 On peut se demander si le 1) du lemme " admet une réciproque. On a la

PROPOSITION.

Soit E un espace métrisable, $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et Γ une multi-application de Ω dans E. On a "$\Gamma^-(U) \in \mathcal{A}$, pour tout ouvert $U \Longrightarrow \Gamma^-(F) \in \mathcal{A}$, pour tout fermé F" si l'une des relations suivantes est vérifiée.

1) Γ est à valeurs compactes.

2) Γ est à valeurs fermées et E est localement compact polonais.

Démonstration :

1) C'est le th. 1.1 de CASTAING [5].

2) Compte tenu du 1) du coroll. 4, la démonstration consiste à reprendre les arguments donnés par ROCKAFELLAR ([2] th. 1) dans le cas de $\mathbb{R}^n$. Il suffit de montrer $\Gamma^-(K) \in \mathcal{A}$, pour tout compact K. Soit (K_n) une suite fondamentale de voisinages compacts de K et (σ_n) une suite de sections mesurables denses dans Γ, alors on a

$$\Gamma^-(K) = \bigcap_n \bigcup_m \sigma_m^{-1}(K_n) .$$

REMARQUES.

Le 2) étend en partie le th. 3.2 de CASTAING [5]. Lorsque $\mathcal{A}$ est la tribu complète d'un espace de mesure $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, toutes les propriétés sont équivalentes (cf. CASTAING [8] lemme 2).

Bibliographie. Citons également HIMMELBERG-VAN VLECK.

0.6 Nous allons donner les deux résultats, connus sous le nom de théorème de Von Neumann, pour des espaces sousliniens pas forcément métrisables. L'exposé de BOURBAKI [5] sur les sousliniens reste valable si l'on remplace "espace métrisable" par "espace séparé" (Cf. SCHWARTZ).

THEOREME.

1) Soit S_1 et S_2 deux sousliniens et $\varphi : S_1 \to S_2$ une surjection continue. Alors il existe une section de φ, $\sigma : S_2 \to S_1$, mesurable pour la tribu engendrée par les sousliniens sur S_2 et la tribu borélienne sur S_1.

2) Soit S un souslinien, X un espace topologique et Γ une multi-application définie sur S à valeurs dans les parties non vides de X de graphe souslinien. Alors Γ admet une section σ, mesurable pour la tribu engendrée par les sousliniens sur S et la tribu borélienne sur X.

Démonstration :

1) Considérons la multi-application $x \mapsto \varphi^{-1}(x)$ de S_2 dans S_1. Elle est à valeurs non vides et de graphe souslinien (car fermé dans $S_2 \times S_1$ par la continuité de φ). Le 1) résulte donc du 2).

2) Soit G le graphe de Γ. Il existe un polonais P et une surjection continue $h : P \to G$. Soit π la projection de G sur S. Alors $\pi \circ h$ est une surjection continue de P sur S. Le graphe H de la multi-application $\Sigma = (\pi \circ h)^{-1}$ est fermé dans $S \times P$. Par suite, pour tout ouvert U de P, $\Sigma^{-}(U)$, qui est la projection sur S de $S \times U \cap H$, est souslinien. Ainsi $\Sigma^{-}(U)$ appartient à la tribu engendrée par les sousliniens. D'après le 1) du corollaire 4 Σ admet une section, ρ, mesurable (pour la même tribu), qui est une section de $\pi \circ h$. Donc $\pi \circ h \circ \rho$ est l'application identique de S, et $\forall x \in S$, $h \circ \rho(x)$ appartient à G et se projette en x. Par suite $h \circ \rho(x)$ est de la forme $(x, \sigma(x))$ où σ est une section de Γ.

Soit ϖ la restriction à G de la projection de $S \times X$ sur X. On a $\sigma(x) = \varpi \circ h \circ \rho(x)$. Comme ϖ et h sont continues, σ est mesurable pour la tribu engendrée par les sousliniens sur S et la tribu borélienne sur X.

REMARQUES.

La démonstration est inspirée de celle de CASTAING [5] p. 123. Le 1) est donné par VON NEUMANN (lemme 5 p. 448-449), PARTHASARATY, SCHWARTZ. L'intérêt de la tribu engendrée par les sousliniens est qu'elle est composée d'ensembles universellement mesurables.

Bibliographie. Citons aussi les travaux de AUMANN [2] , DELLACHERIE, NOVIKOFF, SION, ROGERS-WILLIMOTT.

Récemment CASTAING [7] et HIMMELBERG-JACOBS-VAN VLECK ont obtenu un théorème de section mesurable dans un Banach réflexif sans hypothèse de séparabilité.

Avec des hypothèses et des techniques très différentes il a été démontré des théorèmes de sections continues (MICHAEL [2], et même de sections continues par morceaux (HALKIN-HENDRICKS).

§ 2 . PARTIES COMPACTES D'UN ESPACE METRISABLE SEPARABLE.

0.7 THEOREME.

Soit E un espace métrisable séparable et $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble de ses parties compactes. Soit A_S (resp. A_I) l'ensemble des $\{K \in \mathcal{P}_k(E) | K \subset U\}$ (resp. $\{K | K \cap U \neq \phi\}$) pour tous les ouverts U de E. Soit T_S (resp. T_I) la topologie sur $\mathcal{P}_k(E)$ engendrée par

A_s (resp. A_I), et T la topologie borne supérieure de T_s et T_I. Alors la tribu borélienne de T est engendrée par A_s , et aussi par A_I .

Démonstration :

Il est plus simple d'introduire un espace mesurable auxiliaire $(\Omega, \mathcal{Q})$ et une application $\Gamma : \Omega \to \mathcal{P}_k(E)$. Il suffit de montrer que si $\Gamma^{-}(U) \in \mathcal{Q}$, pour tout ouvert U , ou si $\Gamma^{-}(F) \in \mathcal{Q}$, pour tout fermé F , Γ est mesurable. Sous l'une de ces hypothèses, d'après le § 1, Γ admet une suite (σ_n) de sections mesurables denses. Posons $\Gamma_n(\omega) = \{\sigma_o(\omega), \ldots, \sigma_n(\omega)\}$. Alors $\Gamma_n(\omega) \to \Gamma(\omega)$ pour la topologie T , car on obtient un système fondamental de voisinages de $\Gamma(\omega)$ en prenant l'intersection d'un nombre fini d'ensembles $\{K | K \subset U\}$ et $\{K | K \cap U \neq \phi\}$ (pourvu que $\Gamma(\omega)$ appartienne à ces ensembles) Effectivement si des ouverts U_1 , ..., U_i contiennent $\Gamma(\omega)$ et si des ouverts $V_1, \ldots, V_j$ rencontrent $\Gamma(\omega)$, pour n assez grand $\Gamma(\omega)$ rencontrera $V_1, \ldots, V_j$, et sera contenu dans $U_1, \ldots, U_i$. Il suffit de montrer que Γ_n est mesurable. Or σ_i est limite d'une suite $(\sigma_{ij})_{j \in N}$ de fonctions mesurables étagées. Alors $\Gamma_{nj}(\omega) = \{\sigma_{oj}(\omega), \ldots, \sigma_{nj}(\omega)\}$ tend vers $\Gamma_n(\omega)$ pour T , quand $j \to \infty$, et Γ_{nj} est mesurable car elle est étagée.

Références. DEBREU ((3.1) p. 355). On peut également le démontrer en reprenant le lemme 1.3 et les th. 1.1 et 4.2 de CASTAING [5].

REMARQUES. La topologie T_s (resp. T_I, T) est liée à la semi-continuité supérieure (resp. inférieure, à la continuité) des multi-applications de la façon suivante : une multi-application d'un espace topologique dans $\mathcal{P}_k(E)$ est SCS (resp. SCI , continue) si et seulement si elle est continue pour T_S (resp. T_I , T) .

Sur l'ensemle des parties compactes non vides $(\mathcal{P}_k(E)-\{\phi\})$, la topologie T , dite de Hausdorff, est métrisable séparable. Il est clair que $\mathcal{P}_k(E)$ lui-même est métrisable séparable pour T , et ϕ y est isolé. Par suite il n'y a qu'une seule notion de mesurabilité pour une application d'un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{Q})$ dans $\mathcal{P}_k(E)$ muni de T : en effet, la mesurabilité au sens des tribus, et la propriété d'être limite simple d'une suite de fonctions étagées mesurables, sont équivalentes ; et si on a une mesure de Radon sur un localement compact on a la propriété de Lusin (BOURBAKI [8] ch. 4 § 5 n° 5 , th. 3 p.178). La propriété de Lusin pour les multi-applications a été étudiée par CASTAING [5], qui a généralisé un résultat de PLIS. Un autre résultat a été obtenu par JACOBS.

0.8 <u>COROLLAIRE.</u>

<u>Soit</u> $(\Omega, \mathcal{Q})$ <u>un espace mesurable et</u> $\Gamma : \Omega \to \mathcal{P}_k(E)$. <u>Pour que</u> Γ <u>soit mesurable il faut et il suffit</u> :

1) <u>que</u> $\Gamma^{-}(F) = \{\omega | \Gamma(\omega) \cap F \neq \phi\} \in \mathcal{Q}$, <u>pour tout fermé</u> F <u>de</u> E ,

2) <u>ou que</u> $\Gamma^{-}(U) \in \mathcal{Q}$, <u>pour tout ouvert</u> U.

0.9 <u>COROLLAIRE.</u>

<u>L'application</u> $(A, B) \mapsto A \cap B$ <u>de</u> $\mathcal{P}_k(E) \times \mathcal{P}_k(E)$ <u>dans</u> $\mathcal{P}_k(E)$ <u>est mesurable.</u>

<u>Démonstration</u> :

En effet, l'application $(A, B) \mapsto A \cap B$ de $(\mathcal{P}_k(E))^2$ dans $\mathcal{P}_k(E)$ est continue lorsque $\mathcal{P}_k(E)$ est muni (trois fois) de la topologie T_S . D'après le th. 7 T_S engendre la tribu borélienne de $\mathcal{P}_k(E)$ (muni de la topologie T). De plus, la tribu borélienne de

$(\mathcal{P}_k(E))^2$ lorsque $\mathcal{P}_k(E)$ est muni de la topologie T_S est moins fine (en fait identique) que la tribu borélienne obtenue pour la topologie T, qui, elle, est le produit des tribus des facteurs, car T est métrisable séparable.

REMARQUES.

Le corollaire 9 (ignoré de CASTAING [5]) permet de démontrer facilement le théorème 4.12 (CASTAING [5]). En effet, si (Γ_n) est une suite de multi-applications mesurables, $\omega \mapsto \Sigma(\omega) = \bigcap \Gamma_n(\omega)$ est mesurable, car d'après le corollaire $\omega \mapsto \bigcap_{i=0}^{n} \Gamma_i(\omega)$ est mesurable, et $\bigcap_{i=0}^{n} \Gamma_i(\omega) \to \Sigma(\omega)$ pour la topologie de Hausdorff (et si $\bigcup \Gamma_n(\omega)$ est relativement compact, $\forall \omega$, alors $\omega \mapsto \phi(\omega) = \overline{\bigcup_n \Gamma_n(\omega)}$ est mesurable, car pour tout ouvert U, $\overline{\Phi}(U) = \bigcup \overline{\Gamma}_n(U)$: ces résultats ne nécessitent pas la propriété de Lusin, utilisée par CASTAING).

§ 3. CRITERE DE MESURABILITE

LEMME.

Soit E un ensemble, $(F_i, \mathcal{F}_i)_{i \in I}$ des espaces mesurables et $\varphi_i : E \to F_i$ des applications. Alors la tribu $\mathcal{E}$ la moins fine sur E rendant mesurables les φ_i donne à E une structure initiale (*) d'espace mesurable pour la famille $(\varphi_i)_{i \in I}$ (i.e. si $(\Omega, \mathcal{C})$ est un espace mesurable et $f : \Omega \to E$ une application, pour que f soit mesurable pour $\mathcal{E}$, il faut et il suffit que les $\varphi_i \circ f$ soient mesurables).

(*) BOURBAKI [2] § 2 n° 3 p. 27

Démonstration :

Il suffit de montrer que si les $\varphi_i \circ f$ sont mesurables, f l'est. Or l'ensemble des parties B de E telles que $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ est une tribu. Elle contient les ensembles $\varphi_i^{-1}(C)(C \in \mathcal{F}_i)$, car $f^{-1}(\varphi_i^{-1}(C)) = (\varphi_i \circ f)^{-1}(C)$. Par suite elle contient $\mathcal{E}$, puisque $\mathcal{E}$ est engendrée par les $\varphi_i^{-1}(C)$.

0.10 THEOREME.

Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espace mesurable, soit* E *un espace topologique et* f *une application de* Ω *dans* E.

1) *Si* E *est souslinien, et si on a une suite de fonctions boréliennes* $\varphi_n : E \to \mathbb{R}$, *séparant les points, alors pour que* f *soit mesurable il faut et il suffit que les* $\varphi_n \circ f$ *le soient.*

2) *Si* E *est métrisable séparable, et si on a une suite de fonctions continues* $\varphi_n : E \to \mathbb{R}$, *telles que la topologie la moins fine sur* E *rendant continues les* φ_n *soit la topologie initialement donnée, alors pour que* f *soit mesurable il faut et il suffit que les* $\varphi_n \circ f$ *le soient.*

Démonstration :

1) L'application $\varphi = (\varphi_n) : E \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est borélienne et injective. Montrons que φ^{-1} est borélienne de $\varphi(E)$ dans E. En effet φ a un graphe, G, borélien dans $E \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Vérifions ce point (cf. SCHWARTZ). Posons $\hat{\varphi} = \varphi \times i : E \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$ (ou i est l'application identique de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$). Alors $G = \hat{\varphi}^{-1}(\Delta)$, où Δ désigne la diagonale de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^2$. Alors G est borélien car $\hat{\varphi}$ et Δ le sont. Si B est un borélien de E, $\varphi(B)$ est la projection de $B \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \cap G$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. C'est donc un souslinien, Comme $\varphi(E-B)$ est, pour la même raison, sous-

linien, $\varphi(B)$ est borélien dans $\varphi(E)$. Comme la tribu de $\varphi(E)$ est la trace de la tribu de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (MEYER II-31 p. 44), f est mesurable si et seulement si $\varphi \circ f$ l'est. Le 1) résulte alors du fait bien connu que la tribu borélienne de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est le produit des tribus facteurs.

2) L'application $\varphi = (\varphi_n) : E \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est forcément injective et elle établit un homéomorphisme entre E et $\varphi(E)$. Donc f est mesurable si et seulement si $\varphi \circ f$ l'est, c'est-à-dire si et seulement si les $\varphi_n \circ f$ sont mesurables.

REMARQUES.

Le plus souvent il existe une suite (φ_n) ayant la propriété indiquée.

1) Si E est souslinien, toute famille de fonctions continues séparant les points contient une sous-famille dénombrable séparant les points (cf. SCHWARTZ. Cela résulte du fait que E est de Lindelöf i.e. que tout famille d'ouvert contient une sous-famille dénombrable ayant même réunion).

2) Si E est métrisable séparable et si d est une distance définissant la topologie de E, et (x_n) une suite dense, on peut prendre $\varphi_n = d(x_n, .)$. Plus généralement, si la topologie de E est définie par une suite d'écarts finis δ_n, on peut prendre la famille $\varphi_{n,m} = \delta_n(x_m, .)$. En effet, soit θ un ouvert de E. Il s'agit de montrer que θ est union d'ouverts des topologies les moins fines rendant continues les $\varphi_{n,m}$. Pour cela soit $x \in \theta$. Il existe n tel que $\delta_n(x, \complement\theta) > 0$. Alors il existe un point x_m tel qu'il existe une boule, pour δ_n, de centre x_m, contenant x et contenue dans θ.

Références. Le 1) du théorème est dû à SCHWARTZ (cf. FERNIQUE th. I-2-5 p. 10, pour le cas où E est lusinien).

§ 4 . MULTI-APPLICATION A VALEURS CONVEXES COMPACTES.

0.11 THEOREME.

Soit E un e.v.t.l.c. métrisable séparable, $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et Γ une multi-application de Ω dans les convexes compacts de E. Pour que Γ soit mesurable il faut et il suffit que pour tout $x' \in E'$, la fonction $\omega \mapsto \varphi(x', \Gamma(\omega)) = \sup \{\langle x', x\rangle \mid x \in \Gamma(\omega)\}$ soit mesurable.

Ce théorème, qui couvre le th. 5.10 de DEBREU et le corollaire du th. 6.1 et les th. 6.3 et 6.4 de CASTAING [5], peut se démontrer comme le th. 6.4 de CASTAING.

Démonstration :

La nécessité est facile. Montrons la suffisance. Soit (p_n) une suite fondamentale de semi-hormes et V_n les "semi-boules" associées. Posons, pour deux convexes compacts non vides K et K' :
$\delta_n(K, K') = \sup \{|\varphi(x', K) - \varphi(x', K')| \mid x' \in V_n^o\}$, où
$\varphi(x', K) = \sup \{\langle x', x\rangle \mid x \in K\}$ est la valeur de la fonction d'appui de K en x'. Alors δ_n est un écart fini, et la topologie de Hausdorff sur l'espace des convexes compacts non vides de E est définie par la suite des δ_n (cf. HORMANDER p. 185 formule (5')). D'après le 2) du th. 10 et le 2) de la remarque il suffit de montrer la mesurabilité des $\omega \mapsto \delta_n(K_i, \Gamma(\omega))$, où (K_i) est une suite dense pour la topologie de Hausdorff. Or, pour la topologie de la convergence compacte, V_n^o

est compact métrisable, donc admet une suite dense (x'_p), et l'on a $\delta_n(K_i, \Gamma(\omega)) = \sup_p |\varphi(x'_p, K_i) - \varphi(x'_p, \Gamma(\omega))|$, car $\varphi(., K)$ est continue pour la topologie de la convergence compacte.

REMARQUE.

Pour une autre démonstration cf. la remarque 1.7. Signalons que la théorie des multi-applications mesurables à valeurs convexes fermées, pas forcément compactes (dans $\mathbb{R}^n$), a été développée élégamment par ROCKAFELLAR [1] et [2] .

§ 5 . PARTIE DENSE DENOMBRABLE DANS LE DUAL D'UN E.V.T.

0.12 THEOREME.

Soit E un e.l.c.s. et E' son dual. S'il existe une suite (e'_n) dans E' séparant les points de E, il existe une partie dénombrable $\mathcal{F}$ dense dans E' pour la topologie de Mackey. Et pour tout convexe compact K de E on a

$$K = \{x \in E \mid \forall\ x' \in \mathcal{F},\ \langle x', x\rangle \leq \varphi(x', K)\}.$$

Démonstration

Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble dénombrable des combinaisons linéaires à coefficients rationnels des e'_n. L'espace vectoriel réel F engendré par $\mathcal{F}$ a un orthogonal égal à $\{0\}$, car il contient les e'_n. Il est donc faiblement dense dans E'. L'adhérence $\bar{\bar{\mathcal{F}}}$ de $\mathcal{F}$ pour la topologie de Mackey, contient F, donc contient $\bar{\bar{F}}$ (fermeture pour $\tau(E', E)$) et l'on a $\bar{\bar{F}} = E'$ car l'adhérence d'un convexe est la même pour $\tau(E', E)$ et $\sigma(E', E)$. La formule résulte du théorème de Hahn-Banach et de la propriété de densité de $\mathcal{F}$.

Références. CASTAING [4] th. 5 (signalé par Martineau). L'énoncé exact donné ici figure dans CASTAING-VALADIER [1] p. 4. Dans le même ordre d'idées citons KLEE-OLECH.

Exemple .

Si E est de Lindelöf (voir démonstration du lemme 1 pour la définition) il existe une suite (e'_n) séparant les points. C'est le cas, en particulier, si E est métrisable séparable. Mais dans ce cas on peut obtenir par construction directe une suite plus intéressante. En effet soit (V_n) une suite fondamentale de voisinages de 0. Le polaire V_n^o de V_n est une partie faiblement compacte métrisable, et $\bigcup_n V_n^o = E'$. Soit D_n une partie dénombrable faiblement dense dans V_n^o, et $D = \bigcup_n D_n$. Alors D a la propriété que tout point de E' est limite faible d'une suite de points de D .

§ 6 . INTEGRATION VECTORIELLE.

0.13 Le théorème suivant et une partie de ses conséquences sont dus à CASTAING (et déjà énoncés dans CASTAING-VALADIER).

THEOREME.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu \geq 0$, σ-finie. Soit E un e.l.c.s. et $f : \Omega \to E$ sclairement intégrable. Si Ω se partitionne en un négligeable et une suite de mesurables Ω_n , tels que $f(\Omega_n)$ soit contenu dans un convexe compact équilibré Q_n , et si E est séquentiellement faiblement complet, alors $\int f\mu$ appartient à E .

Démonstration :

La mesure étant σ-finie, on peut se ramener au cas où les Ω_n sont intégrables. On a $\int_{\Omega_n} f\mu \in E$, pour tout n. En effet, si $x' \in Q_n^o$ (polaire de Q_n), on a :

$\langle x', \int_{\Omega_n} f\mu\rangle = \int_{\Omega_n} \langle x', f\rangle \mu \leq \mu(\Omega_n)$, d'où

$\int_{\Omega_n} f\mu \in \mu(\Omega_n)\, Q_n$. Pour tout $x' \in E'$ et $m \in \mathbb{N}$, on a (*) :

$$\left|\langle x', \sum_{n=0}^{m} f\chi_{\Omega_n}\rangle\right| \leq |\langle x', f\rangle| \text{ , et}$$

$$\lim_{m\to\infty} \langle x', \sum_{n=0}^{m} f\chi_{\Omega_n}\rangle = \langle x', f\rangle \quad \text{p.p}$$

D'après le théorème de Lebesgue on a

$$\lim \int \langle x', \sum_{n=0}^{m} f\chi_{\Omega_n}\rangle \mu = \int \langle x', f\rangle \mu.$$

Cela entraîne que $\int f\mu$ appartient à E puisqu'il est limite faible des $\int (\sum_{n=0}^{m} f\chi_{\Omega_n})\mu$, qui appartiennent à E.

0.14 APPLICATION. Si Ω est un espace localement compact, μ une mesure de Radon, et si f est μ-mesurable, il existe une partition de Ω en un négligeable et une suite (K_n) de compacts, telle que, $f|_{K_n}$ soit continue. Alors $f(K_n)$ est compact. On peut donc appliquer le théorème si l'enveloppe convexe fermée d'un compact est faiblement compacte et si E est séquentiellement faiblement complet. Ces conditions sont réalisées si E est e.l.c.s. semi-réflexif, ou un espace L^1 fort ou faible (dans un espace L^1 faible l'enveloppe convexe fermée d'un compact est compact d'après le théorème de Krein. Cf. GROTHENDIECK p. 283).

0.15 APPLICATION. Le théorème s'applique dans le cas d'une mesure abstraite si E est souslinien séquentiellement faiblement complet, et si l'enveloppe convexe fermée d'un compact est compacte. En effet on

(*) En notant χ_A la fonction caractéristique de A.

peut se limiter au cas où μ est bornée. Alors $f : \Omega \to E$ est mesurable (cf. théorème 10), et l'image de μ par f est une mesure de Radon (cf. SCHWARTZ) qui est portée par la réunion d'une suite de compacts. La construction des Q_n et Ω_n est alors facile.

On couvre ainsi un grand nombre de cas. Voici quelques exemples d'espaces sousliniens semi-réflexifs : un Fréchet réflexif séparable, une limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet Montel (les Fréchet Montel sont séparables et la limite inductive est donc un Montel souslinien), le dual faible d'un e.l.c métrisable séparable tonnelé (le résultat $\int f\mu \in E$ est donné par AHMAD prop. 7 p. 109), le dual faible d'une limite inductive stricte d'une suite d'espaces de Fréchet séparables (la limite inductive est tonnelée ce qui signifie que le dual faible est semi-réflexif ou quasi-complet ; de plus le dual de la limite inductive est isomorphe à un sous espace fermé du produit des duals donc est souslinien).

CHAPITRE I

MULTI-APPLICATIONS A VALEURS CONVEXES COMPACTES.

§ 1 . MESURABILITE SCALAIRE. MAXIMUMS LEXICOGRAPHIQUES.

Soit E un e.l.c.s. et $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable ($\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω).

1.1 DEFINITION.

Soit Γ une multi-application de Ω dans l'ensemble des convexes compacts de E. On dit que Γ est scalairement mesurable, si, pour tout $x' \in E'$,

$\omega \mapsto \varphi(x', \Gamma(\omega)) = \sup \{\langle x', x\rangle \mid x \in \Gamma(\omega)\}$ est mesurable.

REMARQUE.

L'ensemble $\{\omega \mid \Gamma(\omega) = \phi\}$ égal à $\{\omega \mid \varphi(0, \Gamma(\omega)) = -\infty\}$, appartient à $\mathcal{A}$.

1.2 LEMME.

Soit (Γ_n) une suite de multi-applications scalairement mesurables de Ω dans les convexes compacts de E , décroissante (i.e. pour tous n et ω , $\Gamma_{n+1}(\omega) \subset \Gamma_n(\omega)$). Alors $\omega \mapsto \bigcap \Gamma_n(\omega)$ est scalairement mesurable.

Démonstration :

Posons $\Sigma(\omega) = \bigcap \Gamma_n(\omega)$, et $\Omega_o = \bigcap\limits_n \{\omega \mid \Gamma_n(\omega) \neq \phi\}$. Il est évident que $\Sigma(\omega)$ est convexe compact et que $\Omega_o = \{\omega \mid \Sigma(\omega) \neq \phi\}$.

Par la remarque 1, $\Omega_o \in \mathcal{Q}$. Soit $x' \in E'$ et $\omega \in \Omega_o$. On va montrer que $\varphi(x', \Sigma(\omega)) = \inf \varphi(x', \Gamma_n(\omega))$ (en fait cela est vrai, trivialement si $\omega \notin \Omega_o$). Soit $x_n \in \Gamma_n(\omega)$ tel que $\varphi(x', \Gamma_n(\omega)) = \langle x', x_n\rangle$ et $\bar{x}$ une valeur d'adhérence de la suite (x_n). Alors $\bar{x} \in \Sigma(\omega)$ et l'on a :

$$\varphi(x', \Sigma(\omega)) \geq \langle x', \bar{x}\rangle \geq \inf \langle x', x_n\rangle = \inf \varphi(x', \Gamma_n(\omega)).$$

Enfin l'inégalité inverse est évidente.

1.3 LEMME.

<u>Si</u> Γ <u>est scalairement mesurable, si</u> $z' \in E'$, <u>si</u> $\rho : E \to \mathbb{R}$ <u>est mesurable, alors</u> $\omega \mapsto \Sigma(\omega) = \{x \in \Gamma(\omega) \mid \langle z', x\rangle = \rho(\omega)\}$ <u>est scalairement mesurable.</u>

Démonstration :

On a $\Omega_o = \{\omega \mid \Sigma(\omega) \neq \phi\} = \{\omega \mid \rho(\omega) \leq \varphi(z', \Gamma(\omega))$ et $-\rho(\omega) \leq \varphi(-z', \Gamma(\omega))\} \in \mathcal{Q}$. Soit $x' \in E'$ et $\omega \in \Omega_o$. Le cas $z' = 0$ étant trivial, supposons $z' \neq 0$.

1) si $x' \in \mathbb{R} z'$, on a $x' = \lambda z'$ et $\varphi(x', \Sigma(\omega)) = \lambda\rho(\omega)$.

2) si $x' \notin \mathbb{R} z'$ on va montrer que

$$\varphi(x', \Sigma(\omega)) = \inf\{\varphi(\lambda z' + x', \Gamma(\omega)) - \lambda\rho(\omega) \mid \lambda \in R\} \quad (*)$$

Le lemme en résultera, car il suffit que λ parcoure $\mathbb{Q}$ (la fonction dont on prend la borne inférieure étant continue en λ). Si $x \in \Sigma(\omega)$, la forme linéaire, $\langle ., x\rangle$ est majorée sur E' par la fonction sous-linéaire $\varphi(., \Gamma(\omega))$. Considérant sa restriction à $\mathbb{R} z' \oplus \mathbb{R} x'$ comme

---

(*) R. Pallu de La Barrière m'a fait remarquer que la fonction d'appui de $\Sigma(\omega)$ est l'inf-convolution des fonctions d'appui de $\Gamma(\omega)$ et de $\{x \in E \mid \langle z', x\rangle = \rho(\omega)\}$. Cela peut se justifier et fournir alors une autre démonstration du lemme.

un prolongement de sa restriction à $\mathbb{R}\,z'$, et en appliquant le lemme de MEYER p. 271 , on obtient :

$$\langle x', x\rangle \leq \inf\{\varphi(\lambda z' + x', \Gamma(\omega)) - \lambda\rho(\omega) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} , \quad \text{d'où}$$

$$\varphi(x', \Sigma(\omega)) \leq \inf\{\varphi(\lambda z' + x', \Gamma(\omega)) - \lambda\rho(\omega) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} .$$

Réciproquement soit h la forme linéaire sur $\mathbb{R}\,z'$ définie par $\lambda z' \mapsto \lambda\rho(\omega)$. Soit h' son prolongement à $\mathbb{R}\,z' \oplus \mathbb{R}\,x'$ défini par $h'(x') = \inf\{\varphi(\lambda z' + x', \Gamma(\omega)) - \lambda\rho(\omega) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ (MEYER ibid.), puis un prolongement linéaire à E', majoré par $\varphi(., \Gamma(\omega))$, défini par un point $\xi \in E'^{*}$. Alors $\xi \in \Gamma(\omega)$, et comme $\langle z', \xi\rangle = \rho(\omega)$, $\xi \in \Sigma(\omega)$, d'où $\varphi(x', \Sigma(\omega)) \geq \inf\{\varphi(\lambda z' + x', \Gamma(\omega)) - \lambda\rho(\omega) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$.

REMARQUE.

Ce résultat, dans le cas où $\rho(\omega) = \varphi(z', \Gamma(\omega))$ (et $E = \mathbb{R}^n$) était connu de KUDO p. 152.

1.4 PROPOSITION.

S'il existe une suite (e'_n) dans E' telle que pour tout ω (e'_n) sépare les points de $\Gamma(\omega)$, si Γ est scalairement mesurable, et si $f : \Omega \to E$ est une section de Γ telle que pour tout n , $\langle e'_n, f(.)\rangle$ soit mesurable, alors f est scalairement mesurable.

Démonstration :

Il suffit de poser $\Gamma_{-1}(\omega) = \Gamma(\omega)$ et pour $n \geq 0$, $\Gamma_n(\omega) = \{x \in \Gamma_{n-1}(\omega) \mid \langle e'_n, x\rangle = \langle e'_n, f(\omega)\rangle\}$. D'après le lemme 3 toutes les Γ_n sont scalairement mesurables, et d'après le lemme 2 il en est de même de leur intersection. Or $\bigcap \Gamma_n(\omega) = \{f(\omega)\}$.

1.5 DEFINITION.

Soit $(x'_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de E', où I est un ensemble bien ordonné. On appelle préordre lexicographique sur E, la relation entre x et y : "$\forall i$, $\langle x'_i, x\rangle = \langle x'_i, y\rangle$, ou si $I_o = \{i \mid \langle x'_i, x-y\rangle \neq 0\}$ est non vide, en notant i_o le plus petit élément de I_o, $\langle x'_{i_o}, x\rangle < \langle x'_{i_o}, y\rangle$ ".

C'est l'image inverse, par l'application $x \mapsto (\langle x'_i, x\rangle)_{i \in I}$ de l'ordre lexicographique sur R^I (BOURBAKI [1]).

REMARQUE :

Pour que l'on ait un ordre il faut et il suffit que (x'_i) sépare les points de E. Si K est un compact de E dont (x'_i) sépare les points, K est ordonné et a un plus grand élément dit maximum lexicographique. D'après le théorème de Hahn-Banach tout convexe compact est l'enveloppe convexe fermée de ses maximums lexicographiques (pour tous les ordres). Comme un maximum lexicographique est un point extrémal on a ainsi une démonstration du théorème de Krein-Milman.

1.6 PROPOSITION.

S'il existe une suite (e'_n) dans E' telle que pour tout ω, (e'_n) sépare les points de $\Gamma(\omega)$, si Γ est scalairement mesurable et à valeurs non vides, et si $f(\omega)$ est le maximum lexicographique de $\Gamma(\omega)$ défini par (e'_n), f est scalairement mesurable.

Démonstration :

Analogue à celle de la proposition 4 , en posant $\Gamma_{-1}(\omega) = \Gamma(\omega)$ et pour $n \geq 0$

$$\Gamma_n(\omega) = \{x \in \Gamma_{n-1}(\omega) \mid \langle e'_n, x\rangle = \varphi(e'_n, \Gamma_{n-1}(\omega))\}.$$

REMARQUE.

La mesurabilité d'un maximum lexicographique, en dimension finie, a été établie par RICHTER [1] (Hilfstaz 2 p. 87), KELLERER (Hilfssatz p. 205) et OLECH [1] (th. 1 p. 318). Les résultats de CASTAING [5] permettent de l'obtenir, mais avec des hypothèses topologiques sur Ω en utilisant la semi-continuité supérieure (cela date de WAZEWSKI et FILIPPOV).

1.7 PROPOSITION.

S'il existe une suite (e'_n) dans E' séparant les points de E, si Γ est scalairement mesurable et à valeurs non vides, il existe une famille dénombrable $(f_i)_{i \in I}$ de sections scalairement mesurables telles que pour tout ω, $\{f_i(\omega) | i \in I\}$ soit dense dans $\Gamma(\omega)$.

Démonstration

D'après le théorème 0.12 il existe une partie dénombrable D dense dans E' pour la topologie de Mackey. Pour chaque $x' \in D$ soit $f_{x'}$ une section scalairement mesurable telle que $\langle x', f_{x'}(\omega)\rangle = \varphi(x', \Gamma(\omega))$ (par exemple un maximum lexicographique). Soit $(f_i)_{i \in I}$ la famille dénombrable des barycentres à coefficients rationnels d'un nombre fini de $f_{x'}$ $(x' \in D)$. Soit, pour ω fixé, $X = \{f_i(\omega) \mid i \in I\}$. Alors $\overline{X}$ contient l'ensemble convexe A de tous les barycentres des $f_{x'}(\omega)$ $(x' \in D)$. Par suite $\overline{X} = \overline{A}$ ce qui montre que $\overline{X}$ est convexe. On a $\overline{X} \subset \Gamma(\omega)$. L'égalité résulte de la formule du th. 0.12

REMARQUE.

Ce résultat permet de retrouver le th. 0.11, car alors les f_i sont mesurables, et si U est un ouvert de E,

$$\{\omega \mid \Gamma(\omega) \cap U \neq \emptyset\} = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(U).$$

1.8 PROPOSITION.

Si Q est un convexe compact métrisable, si $g : \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable, si Γ est scalairement mesurable et à valeurs non vides et si pour tout ω, $\Gamma(\omega) \subset g(\omega)\, Q$, alors Γ admet une famille dense (i.e. ayant la propriété de la prop. 7) dénombrable de sections scalairement mesurables, et sur toute partie de Ω sur laquelle g est bornée, Γ est mesurable (par exemple est limite (pour la topologie de Hausdorff sur les compacts) d'une suite de multi-applications étagées mesurables).

Démonstration

Remarquons que l'enveloppe convexe équilibrée fermée Q' de Q est compacte métrisable, car c'est l'image de $Q^2 \times [0,1]$ par l'application $(x, y, \alpha) \mapsto \alpha x - (1 - \alpha) y$. On peut se limiter à faire la démonstration sur un ensemble $\{\omega \mid |g(\omega)| \leq n\}$. Alors $\Gamma(\omega) \subset n\, Q'$. Soit G le sous-espace de E engendré par Q'. Comme $G = \bigcup_{\lambda \geq 0} \lambda Q'$ il existe (e'_n) dans G' séparant les points de G. On peut alors appliquer la proposition 7 et la remarque 7, et on obtient des sections mesurables pour la topologie de $n\, Q'$, et la mesurabilité pour la topologie de Hausdorff sur les parties compactes de $n\, Q'$.

1.9 PROPOSITION.

S'il existe une suite (e'_n) dans E' séparant les points de E, si Γ est scalairement mesurable, si $\rho : \Omega \to \mathbb{R}$ est mesurable et si $z : \Omega \to E'$ prend ses valeurs dans un sous-espace de dimension finie et est mesurable, alors

$$\omega \mapsto \Sigma(\omega) = \{x \in \Gamma(\omega) \mid \langle z'(\omega), x\rangle = \rho(\omega)\} \quad \text{et}$$

$$\omega \mapsto \Phi(\omega) = \{x \in \Gamma(\omega) \mid \langle z'(\omega), x\rangle \leq \rho(\omega)\}$$

sont scalairement mesurables.

Démonstration :

1) Pour la mesurabilité de Σ il suffit de reprendre la démonstration du lemme 3 en remarquant que :

- l'ensemble $\{\omega \mid x' \in \mathbb{R}\, z'(\omega)\}$ appartient à $\mathcal{A}$

- les fonctions $\omega \mapsto \varphi(\lambda\, z'(\omega) + x', \Gamma(\omega))$ sont mesurables grâce qux hypothèses faites sur z' et à la proposition 7.

2) Il est clair que $\{\omega \mid \Sigma(\omega) \neq \phi\} = \Omega_o$ appartient à $\mathcal{A}$. Sur $\Omega - \Omega_o$ on a $\Phi(\omega) = \phi$ ou $\Phi(\omega) = \Gamma(\omega)$, et comme $\Phi(\omega) = \phi$ si $\rho(\omega) < -\varphi(-z'(\omega), \Gamma(\omega))$ et $\Phi(\omega) = \Gamma(\omega)$ sinon, Φ est scalairement mesurable sur $\Omega - \Omega_o$. Soit $x' \in E'$ et $\Gamma_o(\omega) = \{x \in \Gamma(\omega) \mid \langle x', x\rangle = \varphi(x', \Gamma(\omega))\}$. Soit $f : \Omega_o \to E$ une section scalairement mesurable de Γ_o. Soit $\omega \in \Omega_o$. Si $\langle z'(\omega), f(\omega)\rangle \leq \rho(\omega)$ on a $\varphi(x', \Phi(\omega)) = \varphi(x', \Gamma(\omega))$, et si $\langle z'(\omega), f(\omega)\rangle > \rho(\omega)$ on a $\varphi(x', \Phi(\omega)) = \varphi(x', \Sigma(\omega))$.
En effet la première assertion est triviale. Montrons la deuxième : soit $x \in \Phi(\omega)$ tel que $\langle x', x\rangle = \varphi(x', \Phi(\omega))$. On a $\langle x', f(\omega)\rangle \geq \langle x', x\rangle$ puisque $x \in \Gamma(\omega)$. Comme $f(\omega) \notin \Phi(\omega)$ le segment $[x, f(\omega)]$ coupe $\Sigma(\omega)$ en un point x_1. Alors $\langle x', x_1\rangle \geq \langle x', x\rangle$, d'où $\varphi(x', \Sigma(\omega)) \geq \langle x', x\rangle$ et l'égalité annoncée. Cela prouve que Φ est scalairement mesurable sur Ω_o.

REMARQUE.

La mesurabilité de Σ a été obtenue en dimension finie par RICHTER [1].

§ 2 . APPLICATION. EXISTENCE D'UNE DILATATION MAXIMALE.

1.10 Soit X un convexe compact métrisable d'un e.l.c. , et $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable. Soit K une partie convexe compacte de X . On désigne par $\mathcal{M}_+^1(K)$ l'ensemble des probabilités sur K (elles sont forcément de Radon). Muni de la topologie vague, c'est un compact métrisable. Rappelons la définition de la relation d'ordre sur $\mathcal{M}_+^1(K)$ définie par le cône $\mathcal{S}(K)$ des fonctions continues concaves (MEYER déf. 16 p. 279) : on a $\mu \prec \lambda$ (on devrait noter $\prec_K$) si, pour toute $f \in \mathcal{S}(K)$, $\int f\mu \geq \int f\lambda$; on dit aussi que λ est plus près du bord que μ , ou que λ est balayée de μ sur K . Les éléments maximaux sont les mesures portées par l'ensemble des points extrêmaux : $\ddot{K}$. Pour toute $f \in \mathcal{C}(X)$ on pose $\hat{f} = \inf\{g \in \mathcal{S}(X) \mid g \geq f\}$. Cette fonction est concave s.c.s., et a la propriété que si $\mu \in \mathcal{M}_+^1(X)$ et si $\Sigma = \{\lambda \in \mathcal{M}_+^1(X) \mid \lambda \succ \mu\}$, on a $\varphi(f, \Sigma) = \int \hat{f}\mu$ (MEYER th. 19 p. 280). De plus $\int \hat{f}\mu = \inf\{\int g\mu \mid g \in \mathcal{S}(X),\ g \geq f\}$ (ibid, p. 280).

PROPOSITION.

Si Γ est une multi-application mesurable (*) de Ω dans les convexes compacts non vides de X , et si $\omega \mapsto \mu_\omega$ est une application mesurable Ω dans $\mathcal{M}_+^1(X)$ telle que pour tout ω , $\mu_\omega(\Gamma(\omega)) = 1$, il existe une application $\omega \mapsto \lambda_\omega$ mesurable de Ω dans $\mathcal{M}_+^1(X)$ telle que pour tout ω , λ_ω soit une balayée maximale de μ_ω sur $\Gamma(\omega)$.

Démonstration :

Posons $\Sigma_o(\omega) = \{\lambda \in \mathcal{M}_+^1(X) \mid \lambda \succ \mu_\omega\}$. C'est un ensemble convexe

---

(*) Il suffit pour cela que Γ soit scalairement mesurable d'après la prop. 8.

compact non vide de $\mathcal{M}_+^1(X)$. Pour tout $f \in \mathcal{C}(X)$, on a $\varphi(f, \Sigma_o(\omega)) = \int \hat{f}\, \mu_\omega$. Comme $\mu \mapsto \int \hat{f}\, \mu$ est SCS, donc borélienne, Σ_o est scalairement mesurable. Posons $\Sigma_1(\omega) = \{\lambda \in \mathcal{M}_+^1(X) \mid \lambda(\Gamma(\omega)) = 1\}$. On a pour tout $f \in \mathcal{C}(X)$, $\varphi(f, \Sigma_1(\omega)) = \sup\{f(x) \mid x \in \Gamma(\omega)\}$ qui est mesurable en ω, car $K \mapsto \sup\{f(x) \mid x \in K\}$ est continue pour la topologie Hausdorff (on peut aussi dire que Γ admet une famille dénombrable de sections mesurables denses). Par suite (prop. 8), Σ_o et Σ_1 sont mesurables. Le corollaire 0.9 implique la mesurabilité de $\omega \mapsto \Sigma(\omega) = \Sigma_o(\omega) \cap \Sigma_1(\omega)$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dense dans $-\mathcal{S}(X)$ pour la topologie de $\mathcal{C}(X)$ (convergence uniforme sur X). Alors (f_n), dans la dualité entre $\mathcal{C}(X)$ et $\mathcal{M}(X)$, sépare les points de $\mathcal{M}(X)$, car si $\int f_n\, \mu = 0$, $\forall n$, on a $\int f\, \mu = 0$, $\forall f \in -\mathcal{S}(X)$ et $\mu = 0$ car $\mathcal{S}(X)$ engendre $\mathcal{C}(X)$. On prend pour λ_ω le maximum lexicographique de $\Sigma(\omega)$ pour l'ordre associé à (f_n) (prop. 6). Alors λ_ω est bien maximale pour l'ordre de $\mathcal{M}_+^1(\Gamma(\omega))$. En effet, si $\mu \in \mathcal{M}_+^1(\Gamma(\omega))$ et si $\mu \succ \lambda_\omega$, pour l'ordre de $\mathcal{M}_+^1(\Gamma(\omega))$, on a $\int f_o\, \mu \geq \int f_o\, \lambda_\omega$ (car $f_{o/\Gamma(\omega)} \in -\mathcal{S}(\Gamma(\omega))$). Par ailleurs $\mu \in \Sigma(\omega)$, car μ est balayée de μ_ω sur X (encore parce que $f \in \mathcal{S}(X)$ entraîne $f|_{\Gamma(\omega)} \in \mathcal{S}(\Gamma(\omega))$), et donc par définition de λ_ω, $\int f_o\, \lambda_\omega \geq \int f_o\, \mu$. Finalement $\int f_o\, \mu = \int f_o\, \lambda_\omega$, et de même par récurrence $\int f_n\, \mu = \int f_n\, \lambda_\omega$, pour tout n, d'où $\mu = \lambda_\omega$.

1.11 COROLLAIRE.

Si $f : \Omega \to X$ est une section mesurable de Γ il existe une application $\omega \mapsto \lambda_\omega$ mesurable de Ω dans $\mathcal{M}_+^1(X)$ telle que pour tout ω, λ_ω soit une mesure maximale sur $\Gamma(\omega)$ de barycentre $f(\omega)$.

Démonstration :

Résulte de la proposition en remarquant que $\omega \mapsto \delta_{f(\omega)}$ (mesure de Dirac en $f(\omega)$) est mesurable car $x \mapsto \delta_x$ est continue donc borélienne.

1.12 COROLLAIRE.

Il existe une application $x \mapsto T_x$ de X dans $\mathcal{M}_+^1(X)$, borélienne, telle que pour tout x, T_x soit une mesure maximale de barycentre x.

REMARQUES.

Une application borélienne $x \mapsto T_x$, telle que pour tout x, T_x soit de barycentre x, est appelée une dilatation (MEYER p. 288), ce qui justifie le titre de ce §. Dans le même ordre d'idées :

1) HERVE a montré qu'il existe une application $x \mapsto \lambda_x$ de X dans $\mathcal{M}_+^1(X)$ universellement mesurable telle que pour tout x, λ_x soit maximale de barycentre x.

2) CHOQUET a montré qu'il existe une application $\varphi : \mathcal{M}_+^1(X) \to \mathcal{M}_+^1(X)$ analytique, telle que, pour toute μ, $\varphi(\mu)$ soit balayée maximale de μ.

3) CARTIER-FELL-MEYER p. 443 obtiennent que pour toute mesure μ sur X il existe une dilatation $x \mapsto T_x$, telle que pour μ-presque tout x, T_x soit maximale.

Enfin, signalons que CASTAING a montré ([2]), que si X est de dimension finie, n, et si Ω est compact métrisable et muni d'une mesure de Radon μ, et si f est comme dans le coroll. 11 une section mesurable de Γ, $f(\omega)$ se représente de façon μ-mesurable comme barycentre de $n+1$ points extrémaux de $\Gamma(\omega)$. Le récent travail d'AUMANN [2] a permis à CASTAING ([6]) d'étendre son résultat au cas d'un espace mesuré abstait $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

§ 3 . BORNE SUPERIEURE ESSENTIELLE DE MULTI-APPLICATIONS.

1.13 Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu \geq 0$, σ-finie. Soit E un ensemble. On considérera sur l'ensemble des multi-applications de Ω dans les parties de E la relation de préordre " $\Gamma_1(\omega) \subset \Gamma_2(\omega)$ presque partout " . Nous en parlerons comme d'une relation d'ordre, ce qui fait qu'en réalité nous énoncerons de propriétés des classes d'équivalence modulo l'égalité presque partout.

PROPOSITION.

Soit E un e.l.c.s. tel qu'il existe une suite (e'_n) dans E' séparant les points de E . Soit Σ une multi-application de Ω dans les convexes compacts de E . Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des multi-applications à valeurs convexes compactes scalairement mesurables telles que $\Gamma(\omega) \subset \Sigma(\omega)$ p.p. Alors toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{E}$ admet une borne supérieure ϕ dans $\mathcal{E}$, appelée borne supérieure essentielle, et aussi une borne inférieure. En particulier $\mathcal{E}$ a un plus grand élément.

Démonstration :

D'après le théorème 0.12 il existe une suite (x'_n) dense dans E' pour la topologie de Mackey. D'après NEVEU (démonstration de la prop. II-4-1 p. 43) (*) pour chaque n il existe une partie dénombrable de $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_n$, telle que $\sup \{\varphi(x'_n, \Gamma(.)) | \Gamma \in \mathcal{A}_n\}$ soit le sup. essentiel de la famille $(\varphi(x'_n, \Gamma(.)))_{\Gamma \in \mathcal{A}}$. On prend alors pour $\phi(\omega)$ l'enveloppe connexe fermée de $\bigcup \{\Gamma(\omega) | \Gamma \in \mathcal{A}_n, n \in \mathbb{N}\}$. Alors ϕ est scalairement mesurable, car

$$\varphi(x', \phi(\omega)) = \sup \{ \varphi(x', \Gamma(\omega)) | \Gamma \in \bigcup_n \mathcal{A}_n\} , \quad \text{et} \quad \phi \in \mathcal{E}.$$

(*) En fait NEVEU traite le cas d'une mesure bornée.

Il est clair que tout majorant de $\mathcal{A}$ majore ϕ, et ϕ est bien un majorant de $\mathcal{A}$ car si $\Gamma \in \mathcal{Q}$, on a, $\forall n$,

$\varphi(x'_n, \phi(\omega)) \geq \varphi(x'_n, \Gamma(\omega))$ p.p., d'où $\phi(\omega) \supset \Gamma(\omega)$ p.p. (cf. th 0.12)

Enfin il est connu que, dans un ensemble ordonné, si toute partie a une borne supérieure, toute partie a une borne inférieure (BOURBAKI [1] § 1 ex. 11 p. 31).

1.14 Nous donnons une proposition voisine de la précédente, qui n'utilise pas la convexité.

PROPOSITION.

Soit E un espace topologique métrisable séparable. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des multi-applications Γ de Ω dans les fermés de E telles que $\Gamma^-(U) \in \mathcal{Q}$ (où $\Gamma^-(U) = \{\omega | \Gamma(\omega) \cap U \neq \phi\}$ pour tout ouvert U de E. Alors toute partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{E}$ admet une borne supérieure ϕ dans $\mathcal{E}$, et aussi une borne inférieure.

Démonstration :

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dense dans E, et $(B_i)_{i \in I}$ la famille dénombrable des boules ouvertes $B(x_n, \frac{1}{p})$ $(n \in \mathbb{N}, p \geq 1)$. Comme dans la proposition précédente, d'après NEVEU (ibid.) pour chaque $i \in I$ il existe une partie $\mathcal{A}_i$ de $\mathcal{A}$, dénombrable, telle que $\bigcup \{\Gamma^-(B_i) | \Gamma \in \mathcal{A}_i\}$ soit égal à l'union essentielle de la famille $(\Gamma^-(B_i))_{\Gamma \in \mathcal{A}}$. Soit alors $\phi(\omega) = \overline{\bigcup\{\Gamma(\omega) | \Gamma \in \bigcup \mathcal{A}_i\}}$. On a $\phi \in \mathcal{E}$, car si U est un ouvert de E, $\phi^-(U) = \bigcup\{\Gamma^-(U) | \Gamma \in \bigcup \mathcal{A}_i\}$. Tout majorant de $\mathcal{A}$ contient ϕ. Reste à montrer que ϕ est un majorant de $\mathcal{A}$. Soit $\Gamma \in \mathcal{Q}$. Soit, pour $p \geq 1$ et $\omega \in \Omega$,

$J_p(\omega) = \{n \in \mathbb{N} \,|\, \omega \in \Gamma^-(B(x_n, \frac{1}{p}))\}$ et soit $\Gamma_p(\omega) = \bigcup\{B(x_n, \frac{1}{p}) | n \in J_p(\omega)\}$.

Alors $\Gamma(\omega) = \bigcap_p \Gamma_p(\omega)$. Posons de même $J'_p(\omega) = \{n \in \mathbb{N} | \omega \in \phi^-(B(x_n, \frac{1}{p}))\}$

et $\phi_p(\omega) = \bigcup\{B(x_n, \frac{1}{p}) | n \in J'_p(\omega)\}$. Comme, pour tout n, $\{\omega | n \in J_p(\omega)\} = \Gamma^{-}(B(x_n, \frac{1}{p}))$ est contenu à un ensemble négligeable près dans $\phi^{-}(B(x_n, \frac{1}{p})) = \{\omega | n \in J'_p(\omega)\}$, on a $\Gamma_p(\omega) \subset \phi_p(\omega)$ presque partout, et par suite $\Gamma(\omega) \subset \phi(\omega)$ presque partout.

REMARQUES.

1) Si dans la prop. 14 on se donne une multi-application Σ, et si quel que soit $\Gamma \in \mathcal{A}$, on a $\Gamma(\omega) \subset \Sigma(\omega)$ p.p. on a $\phi(\omega) \subset \Sigma(\omega)$ p.p.

2) Les prop. 13 et 14 montrent que si Σ est une multi-application, il existe une plus grande multi-application, Σ_o, "mesurable" et contenue dans Σ. En particulier les sections mesurables de Σ sont (à une modification sur un négligeable près) des sections de Σ_o. Ainsi dans le lemme 15 ci-dessous il ne serait pas plus général d'enlever l'hypothèse de mesurabilité sur Γ (comme cela a été fait par AUMANN [1]) et de supposer $\forall \omega, \forall u \in \Gamma(\omega)$, $\| u \| \leq g(\omega)$, avec $g \in \mathcal{L}^1$.

§ 4 . REPRESENTATION INTEGRALE OU INTEGRATION D'ENSEMBLES

1.15 On désigne par $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu \geq 0$. On sait que pour une mesure abstraite non σ-finie il faut faire l'hypothèse de DINCULEANU (p. 179) si l'on veut que le dual de L^1 s'identifie à L^∞, mais nous n'en aurons, en général, pas besoin dans la suite de ce chapitre.

DEFINITION.

Une multi-application Γ de Ω dans les convexes compacts d'un e.l.c. E est dite scalairement intégrable si pour tout $x' \in E'$,

$\varphi(x', \Gamma(.))$ est intégrable.

LEMME.

Si Γ est une multi-application de Ω dans les convexes compacts non vides de $\mathbb{R}^n$ scalairement intégrable, et si S_Γ désigne l'ensemble des classes d'équivalence modulo l'égalité presque partout des sections mesurables de Γ, alors S_Γ est une partie convexe faiblement compacte de $L^1_{\mathbb{R}^n}$ (et donc compacte pour $\sigma(L^1_{\mathbb{R}^n}, L^\infty_{\mathbb{R}^n})$).

Démonstration :

On remarque que si l'on pose

$g(\omega) = \sup_i \{ \varphi(e_i, \Gamma(\omega)), \varphi(-e_i, \Gamma(\omega))\}$, où (e_i) est une base de $\mathbb{R}^n$, on a $\|u\| \leq k\, g(\omega)$, $\forall\, u \in \Gamma(\omega)$, k étant une constante positive. Par suite $\{\omega | \Gamma(\omega) \neq \{0\}\}$ est σ-fini (*), et notre énoncé se ramène à l'analogue, pour une mesure abstraite σ-finie, du lemme 7.1 de CASTAING [5]. La démonstration de CASTAING peut aisément être transposée (remarquons que pour montrer que S_Γ est faiblement relativement compact dans $L^1_{\mathbb{R}^n}$, on peut utiliser DUNFORD-SCHWARTZ th. 9 p.292. En fait S_Γ est une partie équi-intégrable particulière : elle est latticiellement bornée ; on peut lui appliquer la remarque de CASTAING-VALADIER [1] p. 10, qui est élémentaire).

Bibliographie. Pour d'autres théorèmes de compacité cf. CASTAING-VALADIER ([1] th 3 et 4).

1.16 Dans la suite de ce §, E désigne un e.l.c.s., Γ une multi-application scalairement intégrable de Ω dans les convexes compacts

(*) BOURBAKI [9] dirait modéré.

non vides de E . On suppose qu'il existe une suite (e'_n) dans E' telle que pour tout ω ; (e'_n) sépare les points de $\Gamma(\omega)$.

NOTATION.

On désigne par $\mathcal{S}_\Gamma$ l'ensemble des sections scalairement mesurables de Γ , et par S_Γ le quotient de $\mathcal{S}_\Gamma$ pour l'égalité presque partout (ce qui équivaut à l'égalité scalairement presque partout.) Pour tout $Z \in \mathfrak{a}$ on pose

$$A_Z = \{\xi \in E'^* | <x', \xi> \leq \int_Z \varphi(x', \Gamma(\omega))\ \mu(d\omega), \quad \forall x' \in E'\}.$$

LEMME.

Les ensembles A_Z sont faiblement compacts et non vides. Toute section $f \in \mathcal{S}_\Gamma$ est scalairement intégrable et $\int_Z f\mu \in A_Z$.

Démonstration

L'ensemble A_Z est borné donc faiblement précompact. Il est fermé dans E'^* muni de $\sigma(E'^*, E')$, donc faiblement complet. Enfin si $f \in \mathcal{S}_\Gamma$, on a : $-\varphi(-x', \Gamma(\omega)) \leq <x', f(\omega)> \leq \varphi(x', \Gamma(\omega))$, donc f est scalairement intégrable, et $<x', \int_Z f\mu> \leq \int_Z \varphi(x', \Gamma(.))\mu$, d'où $\int_Z f\mu \in A_Z$. Cela prouve aussi que A_Z est non vide (car il existe des sections scalairement mesurables), mais on peut le montrer autrement (et les propriétés de A_Z ne dépendent pas de l'existence de la suite (e'_n) cf. VALADIER [1]).

1.17 On sait que la fonction d'appui de la somme de deux convexes compacts, ou de l'homothétique de rapport ≥ 0 d'un convexe compact s'obtient par la même opération sur les fonctions d'appui (cf. HÖRMANDER). Nous allons étendre cette propriété à une intégrale (on peut remarquer que seul le cas de la dimension 1 est trivial).

Le théorème suivant est un cas particulier du théorème de STRASSEN. Nous le démontrons comme le th. 8.8 de CASTAING [5]. Il nous sera utile pour étendre le théorème de STRASSEN (th. 19 ci-dessous).

THEOREME.

Si Γ est une multi-application de Ω dans les convexes compacts non vides de $\mathbb{R}^n$ scalairement intégrable, S_Γ est contenu dans $L^1_{\mathbb{R}^n}$ (cf. lemme 15) et l'ensemble $\{\int f\mu \mid f \in S_\Gamma\}$ est convexe compact non vide, de fonction d'appui

$$x' \mapsto \int \varphi(x', \Gamma(\omega))\, \mu(d\omega).$$

Démonstration :

Désignons par A l'ensemble $\{\int f\mu | f \in S_\Gamma\}$. D'après le lemme 15, A est compact, car l'application $f \mapsto \int f\mu$ est continue puisque la topologie de $\mathbb{R}^n$ est la topologie faible, et que pour tout $x' \in (\mathbb{R}^n)'$ on a $\langle x', \int f\mu\rangle = \langle x' \chi_\Omega , f\rangle$.

De plus A est convexe et non vide. Il est facile de voir que $\varphi(x', A) \leq \int \varphi(x', \Gamma(\omega))\, \mu(d\omega)$. L'inégalité inverse résulte du fait qu'il existe une section $f \in \mathcal{S}_\Gamma$ telle que $\langle x', f(\omega)\rangle = \varphi(x', \Gamma(\omega))$ (cela résulte de la proposition 6).

Bibliographie. Ce résultat (au moins pour μ bornée sans atomes) était connu de RICHTER [1], KELLERER et OLECH [2]. L'intégrale de Riemann a été considérée par HUKUHARA.

1.18 On sait (HÖRMANDER, GHOUILA-HOURI) que l'espace CK $(\mathbb{R}^n)$ des convexes compacts non vides de $\mathbb{R}^n$, muni de la métrique de Hausdorff et de sa structure de cône convexe, se plonge dans un espace de Banach que l'on peut prendre isomorphe à l'espace des fonctions continues positivement homogènes sur $(\mathbb{R}^n)'$, muni de la norme de la convergence uniforme sur la boule unité ; alors le plongement fait correspondre à un convexe compact sa fonction d'appui. Désignons par H cet espace de Banach et par $i : CK(\mathbb{R}^n) \to H$, l'injection. On a alors la :

PROPOSITION.

Les relations suivantes sont équivalentes :

a) Γ est scalairement intégrable,

b) $i \circ \Gamma$ appartient à $\mathcal{L}^1_H$

c) Γ est scalairement mesurable et toute section mesurable est intégrable.

d) Γ est scalairement mesurable et $\exists g \in \mathcal{L}^1_+$ telle que $\|u\| \leq g(\omega)$ $\forall u \in \Gamma(\omega)$, $\forall \omega$

e) Si μ est constituée d'une masse unité en chaque point de Ω : "l'image par i de la famille $(\Gamma(\omega))_{\omega \in \Omega}$ est sommable dans H" (*).

Si ces relations sont vraies l'intégrale dans H est l'image par i de $\{\int f \mu \mid f \in S_\Gamma\}$.

Démonstration :

Il est évident que $d \Rightarrow c$. Et $c \Rightarrow a$ grâce à la proposition 6. Enfin $a \Rightarrow d$ a été établi dans la démonstration du lemme 15. On a $b \Longleftrightarrow d$ d'après la formule (HÖRMANDER)

$$\| i \circ \Gamma(\omega) \| = \sup \{ |\varphi(x', \Gamma(\omega))| \mid \|x'\| \leq 1 \},$$

et le fait que la mesurabilité scalaire équivaut à la mesurabilité pour la topologie de Hausdorff (th. 0.11).

(*) Dans ce cas b) signifie que la famille est absolument sommable.

Enfin b $\Rightarrow$ e trivialement, et en utilisant la fonction d'appui e $\Rightarrow$ a. Explicitons ce dernier point. Supposons pour simplifier $CK(\mathbb{R}^n) \subset H$. La fonction $\varphi(x', .)$ se prolonge en une forme linéaire continue sur H (qui à une fonction continue positivement homogène fait correspondre sa valeur en x') (de plus ce prolongement est unique, mais cela ne sert à rien ici). Alors si e est vraie la famille $(\varphi(x', \Gamma(\omega)))_{\omega \in \Omega}$ est sommable, ce qui signifie $\varphi(x', \Gamma(.)) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Comme $CK(\mathbb{R}^n)$ est complet (muni de la distance de Hausdorff), $i(CK(\mathbb{R}^n))$ est fermé dans H et l'intégrale de $i \circ \Gamma$ appartient à $i(CK(\mathbb{R}^n))$. D'après ce que l'on a dit précédemment sur $\varphi(x', .)$, si on considère $\int (i \circ \Gamma)\mu$ comme un élément de $CK(\mathbb{R}^n)$, sa fonction d'appui est $x' \mapsto \int \varphi(x', \Gamma(\omega))\, \mu(d\omega)$ (fonction linéaire continue d'une intégrale), ce qui avec le théorème 17 établit la dernière assertion.

REMARQUE :

Ce résultat est donné en partie par DEBREU, qui étudie l'intégrale dans H.

1.19 Revenons à un e.l.c.s. E .

THEOREME.

Si Γ est une multi-application de Ω dans les convexes compacts non vides de E , scalairement intégrable.

1) S'il existe une suite (e'_n) dans E' qui sépare les points de $A_\Omega \cap E$ et telle que pour tout ω, (e'_n) sépare les points de $\Gamma(\omega)$, et si pour toute $f \in \mathcal{S}_\Gamma$, $\int f\mu \in E$, alors :
$A_\Omega \cap E = \{\int f\mu \mid f \in \mathcal{S}_\Gamma\}$ et, pour tout $x' \in E'$

$$\max \{\langle x', x\rangle \mid x \in A_\Omega \cap E\} = \int \varphi(x', \Gamma(\omega))\, \mu(d\omega).$$

2) <u>si de plus</u> E <u>est semi-réflexif,</u> A_Ω <u>est contenu dans</u> E.

<u>REMARQUES.</u> Au contraire du théorème 17 on n'utilise pas dans la démonstration la compacité de S_Γ. Des conditions suffisantes pour que $\int f\mu \in E$ sont données dans le chapitre O (§ 6). Ce théorème couvre à la fois le théorème 1 de STRASSEN (p. 424) et les th. 8.8 et 8.12 de CASTAING [5]. (cf également IONESCU TULCEA (A.)). Ce résultat a été obtenu dans les Banach réflexifs (pas forcément séparables par CASTAING [10] th. 3 . Le théorème de STRASSEN a été redémontré par LEVIN.

<u>Démonstration.</u>

1) Soit $\xi \in A_\Omega \cap E$. Soit F_n le sous-espace de E' engendré par $(e'_0, \dots, e'_n)$ Alors $x' \mapsto \varphi(x', \Gamma(\omega))$, restreinte à F_n, est la fonction d'appui d'un convexe compact $\Gamma_n(\omega)$ de F'_n. D'après le théorème 17 la restriction $\langle ., \xi\rangle|_{F_n}$ de la forme linéaire $\langle ., \xi\rangle$ sur E', est de la forme $\int \psi_n \mu$, où $\psi_n \in \mathcal{S}_{\Gamma_n}$.

Soit $\mathcal{U}$ un ultrafiltre sur $\mathbb{N}$ plus fin que le filtre de Fréchet. Posons pour $p \geq n$, $\psi_{n,p}(\omega) = \psi_p(\omega)|_{F_n}$. Alors d'après le lemme 15 $(\psi_{n,p})_{p \geq n}$ admet une limite suivant $\mathcal{U}$ $\psi_{n,\infty}$ dans $\mathcal{L}^1_{F'_n}$ faible. Montrons que $\psi_{n+1,\infty}(\omega)|_{F_n} = \psi_{n,\infty}(\omega)$ p.p. En effet pour $i \leq n$ et $Z \in \mathcal{Q}$, on a

$$\int_Z \langle e'_i, \psi_{n+1,\infty}\rangle\mu = \lim_p \int_Z \langle e'_i, \psi_{n+1,p}\rangle\mu$$

$$= \lim_p \int_Z \langle e'_i, \psi_{n,p}\rangle\mu = \int_Z \langle e'_i, \psi_{n,\infty}\rangle\mu .$$

On peut donc supposer que $\psi_{n+1,\infty}(\omega)|_{F_n} = \psi_{n,\infty}(\omega)$ pour tout ω et pour tout n. Pour ω fixé, les $\psi_{n,\infty}(\omega)$ définissent une forme linéaire L sur $\bigcup_n F_n$, qui est majorée par $\varphi(., \Gamma(\omega))$. D'après le lemme de MEYER p. 271 on peut prolonger L à E' entier en gardant la majoration par $\varphi(., \Gamma(\omega))$. Le prolongement est une forme linéaire définie par un point $f(\omega)$ appartenant à $\Gamma(\omega)$. D'après la proposition 4 f est scalairement mesurable. Comme $\int f\mu$ appartient à $A_\Omega \cap E$, et que, par construction de f, on a

$$<e'_n, \int f\mu> = \int <e'_n, f(\omega) > \mu(d\omega) = <e'_n, \xi>, \quad \forall n ,$$

on a $\int f\mu = \xi$. Enfin montrons la formule de l'énoncé. Soit $x' \in E'$. D'après la proposition 6 il existe $f \in \mathcal{S}_\Gamma$ telle que

$<x', f(\omega)> = \varphi(x', \Gamma(\omega))$, $\forall \omega$. Il en résulte que

$<x', \int f\mu> = \int \varphi(x', \Gamma(\omega)) \mu(d\omega)$.

2) Si E est semi-réflexif, $A_\Omega \cap E$ est faiblement compact (car trace sur E de A_Ω qui est faiblement compact) et convexe. D'après la formule du 1) les demi-espaces faiblements fermés de E'^* contenant A_Ω , ou $A_\Omega \cap E$, sont les mêmes, de sorte que $A_\Omega = A_\Omega \cap E$.

On peut maintenant étendre la pro. 18 de la façon suivante (énoncée par DEBREU th. (6.5) mais la démonstration est erronée).

<u>Soit</u> E <u>un Banach séparable. On désigne par</u> $\mathcal{H}$ <u>l'espace de Banach des fonctions positivement homogènes sur</u> E' <u>continues sur la boule unité</u> B' <u>de</u> E' <u>pour la topologie de la convergence compacte, muni de la norme de la convergence uniforme sur</u> B' (<u>en fait les éléments de</u> $\mathcal{H}$ <u>sont continus sur</u> E'_c <u>grâce au théorème de Banach-Dieudonné</u>). <u>Soit</u> Γ <u>une multi-application mesurable de</u> Ω <u>dans les convexes compacts non vides de</u> E. <u>On a (en notant</u> φ_K <u>la fonction d'appui de</u> K) $\|\varphi_{\Gamma(\omega)}\|_{\mathcal{H}} = \sup \{\| x \| \mid x \in \Gamma(\omega)\}$. <u>Si cette fonction de</u> ω <u>est intégrable</u>

1) <u>l'ensemble</u> $\{ \int f\mu \mid f \in \mathcal{S}_\Gamma\}$, <u>noté</u> $\int \Gamma\mu$, <u>est convexe compact et égal à</u> A_Ω .

2) $\varphi_{\int\Gamma\mu} = \int\varphi_{\Gamma(\omega)}\,\mu(d\omega)$ (intégrale prise dans $\mathcal{H}$),

3) $\varphi_{\int\Gamma\mu}(x') = \int\varphi_{\Gamma(\omega)}(x')\,\mu(d\omega)$ pour tout $x' \in E'$.

Démonstration :

Il est clair que $\mathcal{S}_\Gamma \subset \mathcal{L}^1_E$. Soit ϕ l'intégrale dans $\mathcal{H}$ de $\varphi_{\Gamma(.)}$. Comme, pour $x' \in E'$, $\psi \mapsto \psi(x')$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$, on a $\phi(x') = \int\varphi_{\Gamma(\omega)}(x')\,\mu(d\omega)$. D'après le théorème précédent

$\int\Gamma\mu = \{\int f\mu \mid f \in \mathcal{S}_\Gamma\} = \{x \in E \mid \forall x',\ \langle x', x\rangle \leq \phi(x')\}$.

Comme ϕ est continue sur E'_c, $\int\Gamma\mu$ est compact. Il est alors égal à A_Ω, ce qui établit le 1). La fonction ϕ est la fonction d'appui de $\int\Gamma\mu$, ce qui établit le 2). Enfin le 3) ne fait que réexprimer le théorème 19.

1.20 Voici un corollaire facile qui étend le th. 52 de MEYER (p'302) et le th 8.9 de CASTAING [5] :

COROLLAIRE.

Si X est un espace localement compact polonais, et si l'on pose $E = \mathcal{M}(X)$ muni de la topologie vague, et si Γ est une multi-application de Ω dans les convexes compacts non vides de $\mathcal{M}_+(X)$ scalairement intégrable, alors l'ensemble $\{\int\lambda(\omega)\,\mu(d\omega) \mid \lambda \in \mathcal{S}_\Gamma\}$ est une partie convexe compacte non vide de $\mathcal{M}_+(X)$, et sa fonction d'appui est $f \mapsto \int\varphi(f, \Gamma(\omega))\,\mu(d\omega)$ $\quad (f \in \mathcal{K}(X))$.

Démonstration :

Il est connu qu'il existe une suite (f_n) dans $\mathcal{K}(X)$ séparant les points de $\mathcal{M}(X)$ (il existe même une suite dense dans $\mathcal{K}(X)$ pour sa topologie limite inductive : BOURBAKI [9] § 3 n° 1 lemme 1 p. 21 et [10] § 3 n°1 lemme 1 p. 57). Montrons que A_Ω est contenu dans E. Soit $\xi \in A_\Omega$ et $f \in \mathcal{K}_+(X)$. Alors

$$<f, \xi> \geq - \int \varphi(-f, \Gamma(\omega)) \, \mu(d\omega) \geq 0,$$

ce qui prouve que ξ est une mesure positive sur X.

REMARQUE.

En fait $\mathcal{M}(X)$ est le dual d'une limite inductive stricte d'une suite de Banach séparables, et d'après le ch. 0 § 6, même si $\Gamma(\omega)$ n'est pas contenu dans $\mathcal{M}_+(X)$, on aura $\int \lambda(\omega) \, \mu(d\omega) \in \mathcal{M}(X)$ pour toute $\lambda \in \mathcal{S}_\Gamma$, et $A_\Omega \subset \mathcal{M}(X)$ car $\mathcal{M}(X)$ est semi-réflexif (puisque $\mathcal{K}(X)$ est tonnelé).

§ 5. EXTENSION DU THEOREME DE LJAPUNOV.

Pour la clarté de l'exposé il est préférable de traiter d'abord la dimension finie. Toutefois le théorème suivant n'est pas nouveau. Sa différence avec le théorème de CASTAING ([2] et [5] th. 7.6) est que Ω est un espace abstrait au lieu d'un compact métrisable (la méthode de Castaing peut être utilisée grâce à AUMANN [2], cf. CASTAING [6]). En fait notre énoncé est équivalent à celui de KELLERER (qui améliorait RICHTER). On trouve déjà ce genre de théorème pour une multi-application constante égale au simplexe de $\mathbb{R}^n$ dans DVORETZKY-WALD-WOLFOWITZ, puis pour une multi-application constante égale à un convexe compact de $\mathbb{R}^n$ dans BLACKWELL et dans KARLIN (avec une démonstration non probante), puis KARLIN-STUDDEN.

On note $\ddot{K}$ l'ensemble des points extrémaux d'un convexe compact K. Etant donné une multi-application Γ à valeurs convexes compactes, on note $\mathcal{S}_{\ddot{\Gamma}}$ l'ensemble des éléments f de $\mathcal{S}_\Gamma$ tels que, pour tout ω, $f(\omega) \in \ddot{\Gamma}(\omega)$.

1.21 THEOREME.

Soit $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p)$ une mesure vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, sans atomes, sur Ω (*), Soit $|\mu| = |\mu_1| + \ldots + |\mu_p|$. Soit Γ une multi-application de Ω dans les convexes compacts non vides de $\mathbb{R}^n$ scalairement $|\mu|$-intégrable. On pose, pour $f \in \mathcal{S}_\Gamma$,

$$\int f \otimes \mu = (\int f\mu_1, \ldots, \int f\mu_p) \in (\mathbb{R}^n)^p.$$

Alors l'ensemble $\{\int f \otimes \mu \mid f \in \mathcal{S}_{\ddot{\Gamma}}\}$ est égal à $\{\int f \otimes \mu | f \in \mathcal{S}_\Gamma\}$ et convexe compact non vide.

Démonstration :

Posons $A = \{\int f \otimes \mu | f \in \mathcal{S}_\Gamma\}$ et $B = \{\int f \otimes \mu | f \in \mathcal{S}_{\ddot{\Gamma}}\}$. Alors A est convexe compact non vide, d'après le lemme 15. On va montrer que B est convexe. Pour cela soit f et g appartenant à $\mathcal{S}_{\ddot{\Gamma}}$. Soit λ la mesure vectorielle définie sur $\mathcal{A}$ par

$$\lambda(Z) = \int_Z (g-f) \otimes \mu .$$

Alors λ est une mesure bornée sans atomes. D'après le théorème de Ljapunov (cf. LINDENSTRAUSS. Il y est énoncé dans le cas où les composantes λ_i sont positives, mais on peut se ramener à ce cas par décomposition des λ_i en parties positives et négatives) l'ensemble $\{\lambda(Z) | Z \in \mathcal{A}\}$ est convexe. Donc tout barycentre de $\int f \otimes \mu = \lambda(\phi) + \int_\Omega f \otimes \mu$ et de $\int g \otimes \mu = \lambda(\Omega) + \int_\Omega f \otimes \mu$, est de la forme $\lambda(Z) + \int_\Omega f \otimes \mu$.

Or on a $\lambda(Z) + \int_\Omega f \otimes \mu = \int_\Omega h \otimes \mu$ avec

$$h(\omega) = \begin{cases} g(\omega) & \text{si } \omega \in Z \\ f(\omega) & \text{si } \omega \notin Z , \end{cases} \quad \text{donc } h \in \mathcal{S}_{\ddot{\Gamma}} .$$

(*) Si μ n'est pas bornée, on ne peut la définir sur une tribu, mais on désignera par $\mathcal{A}$ la tribu des ensembles $|\mu|$-mesurables.

Comme en dimension finie un convexe compact est l'enveloppe convexe de ses points extrémaux, il suffit de montrer $\ddot{A} \subset B$.

Si $\xi \in \ddot{A}$ il existe une base $(e'_i)_{1 \leq i \leq np}$ de $(\mathbb{R}^n)^p$ telle que ξ soit le maximum lexicographique de A pour l'ordre associé. Soit $f \in \mathcal{S}_\Gamma$ telle que $\xi = \int f \otimes \mu$. Soit $\varphi_k \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{Q}, |\mu|)$ une densité de μ_k par rapport à $|\mu|$. Pour $\omega \in \Omega$ désignons par $z'_i(\omega)$ la forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, $x \mapsto \langle e'_i, (\varphi_1(\omega)x, \ldots, \varphi_p(\omega)x)\rangle$. Posons $\Gamma_o = \Gamma$ et pour $1 \leq i \leq np$

$$\Gamma_i(\omega) = \{x \in \Gamma_{i-1}(\omega) \,|\, \langle z'_i(\omega), x\rangle = \varphi(z'_i(\omega), \Gamma_{i-1}(\omega))\}.$$

Les Γ_i sont scalairement mesurables d'après la proposition 9. On voit par récurrence sur i que $f(\omega) \in \Gamma_i(\omega)$ $|\mu|$-presque partout.
En effet si $f(\omega) \in \Gamma_{i-1}(\omega)$ $|\mu|$-p.p. et s'il était faux que $f(\omega) \in \Gamma_i(\omega)$ $|\mu|$-p.p., on aurait

$$\int \langle z'_i(\omega), f(\omega)\rangle \, |\mu|(d\omega) < \int \varphi(z'_i(\omega), \Gamma_{i-1}(\omega)) \, |\mu|(d\omega) \quad (*).$$

En prenant $g \in \mathcal{S}_{\Gamma_i}$, on aurait

$$\int \langle z'_i, f\rangle \, |\mu| < \int \langle z'_i, g\rangle \, |\mu| \quad , \quad \text{et} \quad \forall j < i$$

$$\int \langle z'_j, f\rangle \, |\mu| = \int \langle z'_j, g\rangle \, |\mu| \; .$$

Il suffit de remarquer que $\int \langle z'_i, f\rangle \, |\mu| = \langle e'_i, \int f \otimes \mu\rangle$, pour conclure que $\int f \otimes \mu$ ne serait pas un maximum lexicographique.

On a donc $f(\omega) \in \Gamma_{np}(\omega)$ $|\mu|$-presque partout. On va montrer que $|\mu|$-presque partout, $\Gamma_{np}(\omega)$ est réduit à un point de $\ddot{\Gamma}(\omega)$, et cela terminera la démonstration, puisqu'alors $\xi \in B$. Il suffit de montrer que $|\mu|$ presque partout les $z'_i(\omega)$ séparent les points de $\mathbb{R}^n$.
Or si $x \in \mathbb{R}^n$, et si l'un des $\varphi_k(\omega)$ est $\neq 0$, on a

$$\langle z'_i(\omega), x\rangle = \langle e'_i, (\varphi_1(\omega)\, x, \ldots, \varphi_p(\omega)\, x\rangle \neq 0 \text{ pour un } i \, .$$

(*) Sur un ensemble de mesure > 0.

Et pour $|\mu|$-presque tout ω, l'un des $\varphi_k(\omega)$ est $\neq 0$ car $\Sigma\ |\varphi_k(\omega)| = 1$ presque partout.

1.22 THEOREME.

Soit $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_p)$ une mesure vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, sans atomes, sur Ω. Soit $|\mu| = |\mu_1| + \ldots + |\mu_p|$. Soit E un e.l.c.s. tel qu'il existe une suite (e'_n) dans E' séparant les points de E. Soit Γ une multi-application de Ω dans les convexes compacts non vides de E scalairement $|\mu|$-intégrable. On pose, pour $f \in \mathcal{S}_\Gamma$, $\int f \otimes \mu = (\int f \mu_1, \ldots, \int f \mu_p)$. Alors si l'ensemble $A = \{\int f \otimes \mu | f \in \mathcal{S}_\Gamma\}$ (contenu a priori dans $(E'^*)^p$) est contenu dans E^p et compact, le sous-ensemble $B = \{f \otimes \mu | f \in \mathcal{S}_{\ddot{\Gamma}}\}$ est dense dans A.

REMARQUE.

Une condition suffisante pour que A soit contenu dans E^p et soit faiblement compact est donnée par le corollaire du th. 3 de CASTAING-VALADIER [1].

Démonstration :

On reprend en partie la démonstration du théorème précédent. Soit ξ un maximum lexicographique de A, défini par une suite (x'_n) de points de $(E')^p$, que l'on suppose séparant les points de E^p (on va laisser les (x'_n) fixes pour $n \geq 1$ et faire varier seulement x'_0). Soit $f \in \mathcal{S}_\Gamma$ tel que $\int f \otimes \mu = \xi$. Avec les (x'_n) au lieu de $(e'_i)_{1 \leq i \leq np}$, on définit une suite de multi-applications Γ_n telle que $f(\omega) \in \bigcap \Gamma_n(\omega)$ $|\mu|$-presque partout et que, $|\mu|$-presque partout, $\bigcap \Gamma_n(\omega)$ soit réduit à un point de $\ddot{\Gamma}(\omega)$. Il en résulte que $\xi \in B$.

Quand x'_o parcourt $(E')^p$, les points ξ parcourent un ensemble dont l'enveloppe convexe fermée est A (cela résulte du théorème de Hahn-Banach et a déjà été remarqué dans le n° 5). Il suffit de montrer que B est dense, faiblement, dans son enveloppe convexe. Soit un barycentre $\xi = a_1 \xi_1 + \dots + a_n \xi_n$, où $\xi_i = \int f_i \otimes \mu$, avec $f_i \in \mathcal{S}_\Gamma^{\cdot\cdot}$. Soit $y'_1, \dots, y'_m$ appartenant à $(E')^p$ et $\varepsilon > 0$. On cherche à montrer qu'il existe $f \in \mathcal{S}_\Gamma^{\cdot\cdot}$ tel que, $\forall j$, $|\langle y'_j, \xi - \int f \otimes \mu| \leq \varepsilon$, et on va même obtenir $\langle y'_j, \xi - \int f \otimes \mu\rangle = 0$. En effet soit la mesure vectorielle λ, définie sur $\mathcal{Q}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^{nm}$, donnée par

$$\lambda(Z) = (\langle y'_j, \int_Z f_i \otimes \mu\rangle)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} .$$

Remarquons que cela a un sens, et que les λ_{ij} sont bornées, puisque les f_i sont scalairement $|\mu|$-intégrables. De plus les λ_{ij} sont sans atomes car elles sont absolument continues par rapport à $|\mu|$. Posons $|\lambda| = \Sigma |\lambda_{ij}|$. Soit Σ_n le simplexe de $\mathbb{R}^n$, et notons également Σ_n la multi-application constante. Cette multi-application est scalairement $|\lambda|$-intégrable (puisque $|\lambda|$ est bornée). On peut appliquer le théorème précédent à Σ_n et à λ. Soit $h \in \mathcal{S}_{\Sigma_n}$ définie par, $\forall i$, $\forall \omega$, $h_i(\omega) = a_i$. Alors il existe $h' \in \mathcal{S}_\Sigma^{\cdot\cdot}$ telle que $\int h \otimes \lambda = \int h' \otimes \lambda$. On a $(\int h' \otimes \lambda)_{i,i,j} = (\int h \otimes \lambda)_{i,i,j} = a_i \langle y'_j, \xi_i\rangle$. Posons $f(\omega) = \Sigma\, h'_i(\omega)\, f_i(\omega)$. Alors $f \in \mathcal{S}_\Gamma^{\cdot\cdot}$. De plus $\langle y'_j, \int f \otimes \mu\rangle = \sum_i \int \langle y'_j, h'_i f_i \otimes \mu\rangle$, et comme $\int \langle y'_j, h'_i f_i \otimes \mu\rangle =$ $= (\int h' \otimes \lambda)_{i,i,j}$, on a : $\langle y'_j, \int f \otimes \mu\rangle = \sum_i a_i \langle y'_j, \xi_i\rangle = \langle y'_j, \xi\rangle$, ce que nous avions annoncé.

<u>Bibliographie</u>. D'autres extensions, en dimension infinie, ont été proposées par CASTAING [1] et KINGMAN-ROBERTSON.

Cf. également IOFFE-TIHOMITOV (prop. 1.8 p. 71) et UHL.

§ 6. EXTENSION DU THEOREME DE LEBESGUE-NIKODYM.

1.23 Le résultat de ce paragraphe (VALADIER [1]) a été établi indépendamment par G. Debreu et D. Schmeidler, qui utilisent un théorème de Lebesgue-Nikodym vectoriel de RIEFFEL (cf. DEBREU-SCHMEIDLER).

Pour le théorème de Lebesgue-Nikodym classique, BOURBAKI [9] se remène à un compact. Ici, nous nous restreignons à des mesures bornées. Le passage à d'autres cas (par exemple mesure défini sur un localement compact, ou sur un clan de parties d'un ensemble) serait facile.

THEOREME.

Soit $(\Omega, \mathcal{Q}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu \geq 0$ bornée, et $\mathcal{Q}$ μ-complète. Soit M une multi-application de $\mathcal{Q}$ dans les convexes compacts non vides de $\mathbb{R}^n$ (ou de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ muni de la topologie produit).

1) On suppose a) ou bien M est σ-additive et $\mu(Z) = 0 \Longrightarrow M(Z) = \{0\}$, b) ou bien M est additive et $\forall\, x' \in (\mathbb{R}^n)'$ (ou $x' \in (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})' \approx \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$), $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \eta > 0$ tel que $\mu(Z) < \eta$ entraîne $\varphi(x', M(Z)) \leq \varepsilon$ (en dimension finie il est équivalent de supposer $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \eta > 0$ tel que $\mu(Z) < \eta$ et $x \in M(Z)$ entraîne $\|x\| < \varepsilon$).

Alors il existe une multi-application Γ de Ω dans les convexes compacts non vides de $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) scalairement μ-intégrable, telle que $$M(Z) = \int_Z \Gamma(\omega)\, \mu(d\omega) \;(*).$$

(*) C'est l'ensemble A_Z de la notation 16 que l'on note ainsi, car il est contenu dans $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) (remarquer que $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})'^{*} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$).

2) Si on ne se donne pas μ , mais seulement M σ-additive sur $\mathfrak{A}$, il existe une mesure bornée positive sur $\mathfrak{A}$, ν , telle que $\nu(Z) = 0$ entraîne $M(Z) = \{0\}$.

Démonstration :

1) Pour tout x' et $Z \in \mathfrak{A}$ posons $m_{x'}(Z) = \varphi(x', M(Z))$ Avec l'hypothèse a), $m_{x'}$ est une mesure à valeurs dans $\mathbb{R}$, donc bornée (cf. NEVEU), et absolument continue par rapport à μ . Passons à l'hypothèse b). On remarque que $\varphi(x', M(Z)) \geq - \varphi(-x', M(Z))$, d'où $\varphi(x', M(Z)) \geq -\varepsilon$ pour $\mu(Z)$ assez petit. Donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $|m_{x'}(Z)| \leq \varepsilon$ si $\mu(Z) \leq \eta$. La continuité séquentielle (cf. NEVEU) de $m_{x'}$ en résulte, et là encore, $m_{x'}$ est une mesure bornée absolument continue par rapport à μ . L'équivalence signalée entre parenthèses résulte du fait que si $x \in M(Z)$ on a $\|x\| \leq k \sup_{1 \leq i \leq n} (\varphi(e'_i, M(Z)), \varphi(-e'_i, M(Z)))$, où (e'_i) est une base de $(\mathbb{R}^n)'$ et k une constante.

Remarquons que l'on a les propriétés de sous-linéarité : $m_{x'+y'} \leq m_{x'} + m_{y'}$ (1) et $m_{\lambda x'} = \lambda m_{x'}$ $(\lambda \geq 0)$ (2). Soit $\psi_{x'} \in L^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ la densité de $m_{x'}$ par rapport à μ . Les $\psi_{x'}$ vérifient les relations (1) et (2). Supposons que l'on ait trouvé des $\Psi_{x'} \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ représentants des $\psi_{x'}$, vérifiant (1) et (2) pour tout ω . Alors $x' \mapsto \Psi_{x'}(\omega)$ est la fonction d'appui d'un convexe compact non vide $\Gamma(\omega)$. La multi-application Γ est scalairement μ-intégrable, et $\forall Z \in \mathfrak{A}$, $\int_Z \Gamma \mu = M(Z)$. Montrons l'existence des $\Psi_{x'}$. Plaçons-nous dans le cas de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit (e'_n) la base canonique de $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$, et soit $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \left(\frac{|\psi_{e'_n}|}{\|\psi_{e'_n}\|_1} + \frac{|\psi_{-e'_n}|}{\|\psi_{-e'_n}\|_1}\right)$ (*) .

(*) Cela se simplifie de façon évidente dans le cas de $\mathbb{R}^n$.

De par ce choix pour tout x' il existe $k \geq 0$ tel que $|\psi_{x'}| \leq kf$. Soit $f' \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un représentant de f. Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $\Omega_n = \{\omega | n \leq f'(\omega) < n+1\}$. Sur chaque Ω_n les $\psi_{x'}$ sont essentiellement bornées. On obtient les $\Psi_{x'}$ en appliquant le théorème de relèvement de L^∞ (cf. MEYER p. 195) sur chaque Ω_n, et en recollant les morceaux.

2) Il suffit de prendre une mesure ν bornée positive telle que toutes les mesures $m_{e'_n}$ et $m_{-e'_n}$ soient absolument continues par rapport à ν.

REMARQUE.

CASTAING a établi ([8] et [9]) des résultats du même type dans les e.l.c.s. Il faut des hypothèses supplémentaires. Dans le cas le plus simple on trouve que $\Gamma(\omega)$ est contenu dans un compact fixe, par une application immédiate du théorème de relèvement de L^∞.

§ 7. CONTINUITE DES MULTI-APPLICATIONS.

1.24 Rappelons le lemme suivant dû à CASTAING (pour une démonstration cf. VALADIER [3] p. 4).

LEMME.

Soit T un espace topologique et Γ une multi-application de T dans les convexes compacts d'un e.l.c.s. E. Pour que Γ soit S.C.S. en t_0 pour la topologie affaiblie, il faut et il suffit que, pour tout $x' \in E'$, $t \mapsto \varphi(x', \Gamma(t))$ soit S.C.S. en t_0.

1.25 LEMME.

Soit T un espace topologique, E un e.l.c., K un compact de E, et Γ une multi-application de T dans les convexes compacts de K. Pour que Γ soit S.C.I. en t_o, il faut et il suffit que, pour tout $x' \in E'$, $\varphi(x', \Gamma(.))$ soit SCI en t_o.

Démonstration.

Le cas $\Gamma(t_o) = \phi$ étant trivial, supposons $\Gamma(t_o) \neq \phi$.

1) Supposons Γ SCI en t_o. Soit $x' \in E'$ et $\varepsilon > 0$. Alors $\{x \in E \mid \langle x', x\rangle > \varphi(x', \Gamma(t_o)) - \varepsilon\}$ est un ouvert rencontrant $\Gamma(t_o)$. Il rencontre donc $\Gamma(t)$ pour tout t dans un voisinage de t_o. Et cela entraîne $\varphi(x', \Gamma(t)) > \varphi(x', \Gamma(t_o)) - \varepsilon$.

2) Supposons les $\varphi(x', \Gamma(.))$ SCI. Soit U un ouvert de K rencontrant $\Gamma(t_o)$. Sans restreindre la généralité on peut supposer que $0 \in \Gamma(t_o) \cap U$. Soit V un voisinage convexe de 0 dans E tel que $V \cap K \subset U$. Il suffit de montrer qu'il est absurde de supposer l'existence d'une suite généralisée $(t_i)_{i \in I}$ convergeant vers t_o et telle que $\Gamma(t_i) \cap V = \phi$, $\forall$ i. En effet, si cela est, soit, pour chaque $i \in I$, $x'_i \in E'$ tel que $\langle x'_i, x\rangle \leq 1$, $\forall x \in V$ et $\langle x'_i, x\rangle \geq 1$, $\forall x \in \Gamma(t_i)$. Cela implique $\varphi(-x'_i, \Gamma(t_i)) \leq -1$. Soit x' une valeur d'adhérence de (x'_i) dans $V°$ pour la topologie de la convergence compacte (topologie pour laquelle $V°$ est compact). Comme $0 \in \Gamma(t_o)$, on a $\varphi(-x', \Gamma(t_o)) \geq 0$. Par ailleurs si x'_i est assez voisin de x', on a $\varphi(-x', \Sigma) \leq \varphi(-x'_i, \Sigma) + \frac{1}{2}$ pour toute partie convexe compacte Σ de K. Par suite $\forall$ i, $\exists j \geq i$ tel que $\varphi(-x', \Gamma(t_j)) \leq -\frac{1}{2}$ ce qui contredit le fait que $\varphi(-x', \Gamma(.))$ soit SCI en t_o.

1.26 COROLLAIRE.

Soit T un espace topologique localement compact ou métrisable E un e.l.c.s. et Γ une multi-application de T dans les convexes compacts de E, telle que pour tout $x' \in E'$, $\varphi(x', \Gamma(.))$ soit continue. Alors Γ est SCS et SCI pour $\sigma(E, E')$ et même pour la topologie initiale si E est un espace de Montel.

Démonstration :

D'après l'hypothèse sur T on peut se restreindre aux parties compactes de T (si T est métrisable il suffit de considérer des parties $\{\bar{t}, t_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ où $t_n \to \bar{t}$). On peut donc supposer T compact. D'après le lemme 24 $\Gamma(T) = \bigcup_{t \in T} \Gamma(t)$ est $\sigma(E, E')$ compact et on peut appliquer le lemme 25. Si E est de Montel, $\Gamma(T)$ est fortement compact. Le lemme 25 donne la SCI pour la topologie forte, et comme Γ est de graphe fermé, Γ est fortement SCS.

1.27 COROLLAIRE.

Soit T un espace topologique et Γ une multi-application de T dans les convexes compacts de $\mathbb{R}^n$ telle que pour tout $x' \in (\mathbb{R}^n)'$, $\varphi(x', \Gamma(.))$ soit continue. Alors Γ est continue.

Démonstration :

Soit $t_o \in T$. Soit (e'_i) une base de $(\mathbb{R}^n)'$. Soit V un voisinage de t_o tel que les $\varphi(e'_i, \Gamma(.))$ et $\varphi(-e'_i, \Gamma(.))$ soient bornées sur V. Alors $\bigcup \{\Gamma(t) \mid t \in V\}$ est borné et les arguments sont les mêmes que dans le corollaire 26 (dans le cas d'un espace de Montel.)

CHAPITRE II

SOUS-DIFFERENTIELS DE CERTAINES FONCTIONS CONVEXES

§ 1. FONCTIONS CONVEXES A VALEUR DANS UN ESPACE VECTORIEL ORDONNE.

2.1 Dans ce chapitre E désigne un espace vectoriel réel, C un convexe de E et x_0 un point de C.

Soit F un espace vectoriel ordonné. On note $\leq$ l'ordre, et F_+ l'ensemble des éléments ≥ 0. On sait que $x \geq y$ équivaut à $x-y \in F_+$, et que F_+ est un cône convexe pointé saillant (i.e. $F_+ \cap (-F_+) = \{0\}$).

DEFINITION.

On dit qu'une fonction $f : C \to F$ est convexe si $\forall\ \alpha \in [0, 1]$, $\forall x$, $y \in C$, on a

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \leq \alpha\ f(x) + (1-\alpha)\ f(y).$$

On dit que $p : E \to F$ est positivement homogène si quels que soient $x \in E$ et $\lambda \in R_+$, $p(\lambda x) = \lambda p(x)$. On dit que p est sous-additive si, quels que soient x et y, $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$. On dit que p est sous-linéaire si elle est positivement homogène et sous-additive ; elle est alors convexe.

On se propose d'étudier la sous-différentiabilité des fonctions convexes (problème déjà abordé par RAFFIN)

Les propriétés des fonctions convexes d'une variable réelle jouent un rôle fondamental. On a la propriété suivante (classique pour les fonctions numériques, et dont la démonstration est identique).

PROPOSITION.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $\varphi : I \to F$ une fonction convexe et $\lambda_o \in I$. Alors, sur $I - \{\lambda_o\}$, la fonction $\lambda \mapsto \dfrac{\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_o)}{\lambda - \lambda_o}$ est croissante.

2.2 DEFINITION.

On appelle sous-gradient de f en x_o, toute application linéaire $T : E \to F$ (continue, si E et F sont des e.v.t.) telle que $T(x-x_o) \leq f(x) - f(x_o)$, pour tout $x \in C$. L'ensemble des sous-gradients est appelé sous-différentiel, et noté $\partial f(x_o)$.

2.3 DEFINITION.

Si dans F toute suite croissante majorée a une borne supérieure, et si $C - x_o$ est absorbant dans E, on note $f'(x_o, h)$ (pour tout $h \in E$) l'élément de F défini par

$$\inf \left\{ \frac{f(x_o+\lambda h) - f(x_o)}{\lambda} \mid \lambda > 0,\ x_o+\lambda h \in C \right\}.$$

REMARQUE.

Par symétrie toute suite décroissante et minorée a une borne inférieure. Pour définir $f'(x_o, h)$ il suffit de prendre la borne inférieure de $\left\{\dfrac{f(x_o+\lambda_n h) - f(x_o)}{\lambda_n}\right\}$ où λ_n est une suite décroissante tendant vers 0 telle que $\lambda_n > 0$ et $x_o + \lambda_n h \in C$. Cette borne inférieure existe car on obtient, d'après la proposition 1, une suite décroissante et minorée (par exemple par $\dfrac{f(x_o) - f(x_o-\mu h)}{\mu}$ pour un $\mu > 0$ suffisamment petit pour que $x_o - \mu h \in C$).

PROPOSITION.

Sous les hypothèses de la définition précédente la fonction $h \mapsto f'(x_o, h)$ est sous-linéaire.

Démonstration :

Elle est évidemment positivement homogène. Montrons la sous-additivité. Soit (λ_n) une suite décroissante, de nombres > 0, tendant vers 0 et telle que λ_o soit assez petit pour que $x_o + 2\lambda_o h_1$ et $x_o + 2\lambda_o h_2 \in C$ (ce qui entraîne $x_o + \lambda_o(h_1+h_2) \in C$). On a

$$\frac{f(x_o+\lambda_n(h_1+h_2)) - f(x_o)}{\lambda_n} \leq \frac{f(x_o+2\lambda_n h_1) - f(x_o)}{2\lambda_n} + \frac{f(x_o+2\lambda_n h_2) - f(x_o)}{2\lambda_n}$$

Désignons par a_n et b_n les deux derniers termes. Les suites (a_n) et (b_n) sont décroissantes et minorées. On a trivialement

$\inf\limits_n (a_n+b_n) = \inf\limits_{n,m} (a_n+b_m)$. D'après BOURBAKI [3] (ch. VI § 1 n° 8 prop. 6 p. 12) $\inf\limits_{n,m} (a_n+b_m) = \inf a_n + \inf b_n$. Par suite

$f'(x_o, h_1+h_2) \leq \inf (a_n+b_n) = \inf a_n + \inf b_n = f'(x_o, h_1) + f'(x_o, h_2)$.

2.4 PROPOSITION.

Sous les hypothèses de la définition 3, pour qu'une application linéaire $T : E \to F$ soit un sous-gradient en x_o il faut et il suffit que $T(h) \leq f'(x_o, h)$ pour tout $h \in E$.

Démonstration :

1) Supposons $T(h) \leq f'(x_o, h)$, pour tout h. Soit $x \in C$. Alors $T(x-x_o) \leq f'(x_o, x-x_o) \leq f(x) - f(x_o)$. La dernière inégalité résulte de la définition de $f'(x_o, .)$.

2) Soit T un sous-gradient. Soit $h \in E$. Pour tout $\lambda > 0$, assez petit pour que $x_o + \lambda h \in C$, on a $T(\lambda h) \leq f(x_o+\lambda h) - f(x_o)$, d'où $T(h) \leq \dfrac{f(x_o+\lambda h) - f(x_o)}{\lambda}$, et $T(h) \leq f'(x_o, h)$.

2.5 Rappelons une définition (cf. PERESSINI p. 61).

DEFINITION.

Un espace vectoriel topologique ordonné, F, est dit normal s'il existe un système fondamental de voisinages de 0, $\mathcal{V}$, tel que $V \in \mathcal{V}$, $x \in V$, $y \in V \Rightarrow [x, y] \subset V$ (on note $[x, y]$ l'intervalle au sens de l'ordre d'extrémités x et y : $\{z | x \leq z \leq y\}$).

Rappelons aussi qu'on appelle treillis vectoriel complet (ou selon BOURBAKI [8], ch. 2 § 1 n° 3, espace de Riesz complètement réticulé) un espace vectoriel ordonné filtrant où toute partie non vide majorée a une borne supérieure.

THEOREME.

Si E est un e.v.t. et F un e.v.t. ordonné normal qui soit un treillis vectoriel complet, si $x_0 \in \overset{\circ}{C}$ et si f est continue en x_0 alors le sous-différentiel "algèbrique" (*) est identique au sous-différentiel topologique $\partial f(x_0)$, et c'est une partie convexe non vide équicontinue de $\mathcal{L}(E, F)$. De plus on a la formule

$$f'(x_0, h) = \max \{T(h) | T \in \partial f(x_0)\}.$$

Démonstration :

Il est évident que $\partial f(x_0)$ est convexe. Les voisinages de 0 dans F, V, tels que $x, y \in V \Longrightarrow [x, y] \subset V$ et symétriques forment un système fondamental de voisinages. Soit V un tel voisinage. Soit U un voisinage symétrique de 0 dans E tel que $x_0 + U \subset C$ et que $x - x_0 \in U \Longrightarrow f(x) - f(x_0) \in V$. Alors si T est un sous-gradient "algébrique", et si $h \in U$, on a $T(h) \leq f(x_0+h) - f(x_0)$, et $T(-h) \leq f(x_0-h) - f(x_0)$, d'où $T(h) \geq f(x_0) - f(x_0-h)$. Il en

(*) C'est-à-dire qu'on oublie les structures topologiques de E et F. (cf. déf. 2) résulte $T(h) \in [f(x_o) - f(x_o-h),\ f(x_o+h) - f(x_o)] \subset V$. Cela prouve que les sous-gradients "algébriques" sont continus et même forment une partie équicontinue. Etablissons la formule. D'après la prop. 4 il reste à montrer que pour h fixé il existe $T \in \partial f(x_o)$ tel que $T(h) = f'(x_o, h)$. Or soit T_o l'application linéaire de $\mathbb{R}h$ dans F définie par $T_o(\lambda h) = \lambda f'(x_o, h)$ pour tout $\lambda \in \mathbf{R}$. On a $T_o(\lambda h) \leq f'(x_o, \lambda h)$ quel que soit le signe de λ, car $f'(x_o, -h) \geq -f'(x_o, h)$. D'après le théorème de Hahn-Banach analytique étendu aux treillis vectoriels complets (cf. PERESSINI p. 78), T_o se prolonge à E en gardant la majoration par $f'(x_o, .)$, ce qui, grâce à la prop. 4, fournit un sous-gradient ayant la propriété désirée.

<u>COROLLAIRE.</u>

<u>Sous les hypothèses du théorème</u>

1) <u>si</u> F <u>est localement convexe et semi-réflexif,</u> $\partial f(x_o)$ <u>est relativement compact dans</u> $\mathcal{L}_s(E, F_\sigma)$ (F_σ <u>désigne F muni de</u> $\sigma(\mathbf{F}, F')$),

2) <u>si de plus</u> F_+ <u>est fermé,</u> $\partial f(x_o)$ <u>est compact dans</u> $\mathcal{L}_s(E, F_\sigma)$ <u>et, quel que soit</u> $y' \in F'_+$ (<u>cône positif de</u> F'), <u>on a</u> $y'(\partial f(x_o)) = \partial(y' \circ f)(x_o)$ (<u>cette propriété est considérée par RAFFIN 2e partie p. 8</u>).

<u>Démonstration</u> :

1) Comme $\partial f(x_o)$ est équicontinue, pour tout $x \in E$, l'ensemble $\{T(x) \mid T \in \partial f(x_o)\}$ est borné, donc faiblement relativement compact puisque F est semi-réflexif. La conclusion résulte du coroll. de la prop. 4 du ch. III § 3 n° 5 de BOURBAKI [7] (c'est une conséquence facile du théorème d'Ascoli).

2) Si F_+ est fermé, d'après la prop. 4,

$$\partial f(x_o) = \bigcap_{h \in E} \{T \in \mathcal{L}(E, F) | T(h) \leq f'(x_o, h)\}$$

$$= \bigcap_{h \in E} \{T \in \mathcal{L}(E, F) | T(h) \in f'(x_o, h) - F_+\},$$

donc $\partial f(x_o)$ est fermé dans $\mathcal{L}_s(E, F_\sigma)$, donc compact. Montrons la dernière assertion. Soit $y' \in F'_+$. Comme l'application $T \mapsto y' \circ T$ est continue de $\mathcal{L}_s(E, F_\sigma)$ dans E'_s (i.e. E' muni de $\sigma(E', E)$), $y'(\partial f(x_o))$ est compact. Il est aussi convexe et trivialement contenu dans $\partial(y' \circ f)(x_o)$. Soit $h \in E$. On sait que le maximum de $\langle ., h\rangle$ sur $\partial(y' \circ f)(x_o)$ est $(y' \circ f)'(x_o, h)$. On va montrer qu'il existe $T \in \partial f(x_o)$ tel que $\langle y' \circ T, h\rangle = (y' \circ f)'(x_o, h)$. D'après Hahn-Banach cela établira l'égalité $y'(\partial f(x_o)) = \partial(y' \circ f)(x_o)$. Il existe, d'après le théorème, $T \in \partial f(x_o)$ tel que $T(h) = f'(x_o, h)$.

On a $\langle y' \circ T, h\rangle = \langle y', T(h)\rangle = \langle y', f'(x_o, h)\rangle$

$$= \langle y', \inf \frac{f(x_o+\lambda_n h) - f(x_o)}{\lambda_n}\rangle ,$$

où (λ_n) est une suite décroissante tendant vers 0 de nombres > 0, telle que $x_o + \lambda_o h \in C$. D'après PERESSINI (p. 91-92) la suite $\frac{f(x_o+\lambda_n h) - f(x_o)}{\lambda_n}$ converge dans F vers sa borne inférieure. Donc, comme y' est continue et positive :

$$\langle y' \circ T, h\rangle = \inf \langle y', \frac{f(x_o+\lambda_n h) - f(x_o)}{\lambda_n}\rangle = (y' \circ f)'(x_o, h).$$

2.6 La proposition suivante sera utilisée dans la démonstration du th. 7.

PROPOSITION.

Si E est un e.v.t. et F un e.v.t ordonné où les intervalles $[x, y]$ sont bornés pour la topologie, et si f est majorée au voisinage d'un point de $\overset{\circ}{C}$, alors f est continue sur $\overset{\circ}{C}$.

Démonstration :

Il suffit de reprendre celle donnée, dans le cas $F = \mathbb{R}$, par BOURBAKI [6] (ch. II § 2 n° 10 prop. 21 p. 60), en tenant compte du fait que un intervalle $[-z, z]$ $(z \geq 0)$ est absorbé par tout voisinage de 0 dans F.

2.7 THEOREME.

Soit E un e.v.t. et F un e.l.c.s. ordonné où F_+ est fermé On suppose que dans F tout intervalle $[x, y]$ est borné pour la topologie, et que toute suite (x_n) croissante majorée admet une borne supérieure z et converge vers z (ces hypothèses sont réalisées si F est localement convexe, normal et faiblement séquentiellement complet cf. PERESSINI coroll. 3.5 et prop. 3.4 p. 91-92). Si f est majorée au voisinage d'un point $x_0 \in \mathring{C}$, il existe un voisinage V de 0 contenu dans $\mathring{C} - x_0$ tel que $\bigcup \{\partial f(x) | x \in x_0+V\}$ soit équicontinue, et que, si F est semi-réflexif, la multi-application $x \mapsto \partial f(x)$ soit à valeurs compactes et SCS de x_0+V dans $\mathcal{L}_s(E, E_\sigma)$.

Démonstration :

Soit U un voisinage de 0 symétrique contenu dans $\mathring{C} - x_0$, tel que f soit majorée par $z \in F$ sur $x_0 + U$. D'abord montrons que si $x = x_0 + h \in x_0 + U$ on a $f(x) \geq 2\, f(x_0) - z$.

En effet $f(x_0) \leq \frac{1}{2} f(x_0+h) + \frac{1}{2} f(x_0 - h)$

$\leq \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} (z)$ d'où l'inégalité.

Soit V un voisinage symétrique de 0 tel que $V + V \quad U$.

Soit $x \in x_0 + V$, $T \in \partial f(x)$ et $h \in V$. Comme x et $x + h$ appartiennent à $x_0 + U$, on a

$T(h) \leq f(x+h) - f(x) \leq z - 2f(x_0) + z = 2z - 2f(x_0)$ et

$T(h) = - T(-h) \geq f(x) - f(x-h) \geq 2f(x_0) - z - z = 2f(x_0) - 2\, z$.

L'ensemble $B = [2f(x_o) - 2z , 2z - 2f(x_o)]$ est borné. Si W est un voisinage de 0 dans F il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon B \subset W$. Alors si $h \in \varepsilon V$, on a $T(h) \in W$, pour tout $x \in x_o + V$, et tout $T \in \partial f(x)$. Cela prouve que $\bigcup \{\partial f(x) | x \in x_o + V\}$ est équicontinu. Montrons maintenant que $x \mapsto \partial f(x)$ est SCS. Pour cela il suffit de montrer (*) qu'elle est de graphe fermé. Le graphe est

$$\{(x, T) | x \in x_o+V, T \in \mathcal{L}(E, F), T(h) \leq f'(x, h), \forall h \in E\}$$

$$= \{(x, T) | \langle z', T(h)\rangle \leq \langle z', f'(x, h)\rangle, \forall h \in E, \forall z' \in F'_+\}$$

$$= \{(x, T) | \langle z', f'(x, h)\rangle - \langle z', T(h)\rangle \geq 0, \forall h, \forall z' \in F'_+\}.$$

Il suffit donc de montrer que les fonctions

$x \mapsto \langle z', f'(x, h)\rangle$ sont SCS sur $x_o + V$ ($\forall h \in E$, $\forall z' \in F'_+$).

Soit (λ_n) une suite décroissante tendant vers 0, > 0, telle que $\lambda_n h \in V$ pour tout n. On a $\langle z', f'(x, h)\rangle = \langle z', \inf_n \frac{f(x+\lambda_n h)-f(x)}{\lambda_n}\rangle$.

D'après l'hypothèse sur F

$$\langle z', f'(x, h)\rangle = \inf_n \langle z', \frac{f(x+\lambda_n h) - f(x)}{\lambda_n}\rangle$$

D'après la prop. 6 les fonctions $x \mapsto \langle z', f(x+\lambda_n h) - f(x)\rangle$ sont continues sur $x_o + V$. C.Q.F.D.

REMARQUES.

1) Si E et F sont localement convexe séparés le dual de $\mathcal{L}_s(E, F)$ s'identifie à $E \otimes F'$. On ne sait calculer la fonction d'appui de $\partial f(x)$ que pour des tenseurs décomposables $h \otimes z'$ où $z' \in F'_+$.

2) La démonstration de l'équicontinuité de $\bigcup \{\partial f(x) | x \in x_o+V\}$ semble nouvelle même dans le cas $F = \mathbb{R}$ (cf. MOREAU prop.11 e p. 79).

(*) Compte tenu du fait qu'une partie équicontinue de $\mathcal{L}_s(E, F_\sigma)$ est relativement compacte et de BERGE.

3) Les espaces L^p $(1 \leq p < \infty)$ ordonnés par la relation "$f \leq g$ presque partout" sont des treillis vectoriels complets, normaux et faiblement séquentiellement complets. Pour $p > 1$ ils sont réflexifs.

§ 2. SOUS-DIFFERENTIABILITE AU SENS DE FRECHET.

On revient aux fonctions numériques.

2.8 Le lemme suivant est inspiré de GROTHENDIECK (ch. 2 n° 14 p.98).

LEMME.

Soit B un convexe symétrique d'un e.v.t. E, $p : E \to \mathbb{R}$ une fonction sous-linéaire (*), SCS en 0 sur B. Alors p est uniformément continue sur B.

Démonstration :

Quels que soient x et y appartenant à B, on a $|p(x) - p(y)| \leq \sup(p(x-y), p(y-x))$. Or p est SCS en 0 sur $2B$, donc il existe un voisinage symétrique de 0 dans E, V, tel que $z \in V \cap 2B$ entraîne $p(z) \leq \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ étant donné). Alors si $x - y \in V$ et x et y appartiennent à B, on a $|p(x) - p(y)| \leq \varepsilon$.

2.9 On désigne maintenant par f une fonction numérique convexe sur E, finie en x_0.

PROPOSITION.

Soit E un espace de Banach et B sa boule unité. Supposons

(*) Cf. MEYER p. 270 (il semble que pour BOURBAKI [6] p. 61, une fonction sous-linéaire est ≥ 0)

qu'il existe une topologie $\mathcal{C}$ d'e.v.t. sur E pour laquelle B soit compacte et f SCS sur une boule de centre x_0 (de rayon > 0).
Alors on a, pour $h \neq 0$;

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0, h) + \mathcal{E}(h) \; \|h\| \quad ,$$

avec $\mathcal{E}(h) \to 0$ quand $\|h\| \to 0$.

Démonstration

Remarquons que si $x_0 + \lambda B$ $(\lambda > 0)$ est une boule sur laquelle f est $\mathcal{C}$-SCS, il existe en particulier un voisinage symétrique de 0 pour $\mathcal{C}$, V, tel que f soit majorée sur $x_0 + (\lambda B \cap V)$. Alors f est finie sur $x_0 + (\lambda B \cap V)$ (car on a $f(x_0+z) \geq 2f(x_0) - f(x_0-z) > -\infty$). Il s'ensuit que $f'(x_0, h)$ est fini pour tout h ; et d'après le lemme 8 la fonction $f'(x_0, .)$, majorée par $f(x_0+.) - f(x_0)$ est $\mathcal{C}$-continue sur tout boule. Définissons pour $n \geq 1$ la fonction φ_n sur B , en posant si $y \in B$

$$\varphi_n(y) = n \left[f(x_0 + \tfrac{y}{n}) - f(x_0) - f'(x_0, \tfrac{y}{n})\right].$$

Pour n assez grand (pour $n \geq \frac{1}{\lambda}$) φ_n est $\mathcal{C}$-SCS sur B .
On va appliquer le théorème de Dini. On a $\varphi_n(y) \geq 0$, et les φ_n décroissent ; de plus $\varphi_n(y) \leq \mathcal{E}(\frac{y}{n})$ si $y \neq 0$ et $\varphi_n(0) = 0$ (tout cela découle des propriétés des fonctions convexes d'une variable réelle). Comme, pour y fixé, $\mathcal{E}(\frac{y}{n}) \to 0$ quand $n \to \infty$, les φ_n tendent simplement vers 0 en décroissant, et le théorème de Dini implique que la convergence est uniforme sur B . Or si $0 < \|h\| \leq \frac{1}{n}$, on a $\mathcal{E}(h) \leq \mathcal{E}\left(\frac{h}{n\|h\|}\right) = \varphi_n\left(\frac{h}{\|h\|}\right)$ d'où la proposition.

REMARQUE.

1) En dimension finie on peut utiliser le théorème de Dini sur la sphère unité, ce qui est à la fois plus simple et plus naturel.

2) Si on suppose seulement E normé, sa boule unité étant $\mathscr{C}$-compacte, la topologie $\mathscr{C}$ est moins fine que la topologie de la norme, et il résulte de BOURBAKI [4] (ch. 2 § 3 n° 3 coroll. de la prop. 7 p. 210) que B est complète pour la norme, donc que E est un Banach.

3) La proposition 9 va plus loin que la dimension finie. Par exemple si E est un Hilbert et A un opérateur hermitien positif compact, la fonction $x \mapsto (Ax|x)$ vérifie les hypothèses, avec pour $\mathscr{C}$ la topologie faible.

4) Voici un exemple qui montre que la formule de la proposition est fausse si f n'est pas suffisamment "plate". Soit $E = \ell^2(\mathbb{N})$ et $f(x) = \sup \{\|x\|^2 , |x_n|^{1+\frac{1}{n}} \mid n \geq 1\}$. Alors on a $f(x) \leq 1$ si $\|x\| \leq 1$ et $f(x) = \|x\|^2$ si $\|x\| \geq 1$. Donc f est continue. En 0 la formule est fausse car $f'(0, h) = 0$, pour tout h, mais pour $h = \eta\, e_n$ ((e_n) étant la base orthonormale), on a

$$\varepsilon(h) = \frac{f(h) - f(0) - f'(0, h)}{\|h\|} = \frac{f(\eta\, e_n)}{|\eta|} = |\eta|^{\frac{1}{n}} .$$

Et ce nombre tend vers 1 (pour $\eta \neq 0$) quand $n \to \infty$.

§ 3 . SOUS-DIFFERENTIEL D'UNE SOMME CONTINUE DE FONCTIONS CONVEXES.

On va donner un théorème de représentation intégrale pour les sous-gradients d'une fonction convexe définie par une intégrale. On pourra utiliser le th. 1.19 (théorème de Strassen) grâce au lemme suivant (qui est en fait une propriété des fonctions d'une variable réelle).

2.10 LEMME.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu \geq 0$, et $(f_\omega)_{\omega \in \Omega}$ une famille de fonctions convexes sur un espace vectoriel réel E, telle que pour tout $x \in E$, $\omega \mapsto f_\omega(x)$ soit mesurable. On suppose qu'il existe un ensemble V tel que $V - x_0$ soit absorbant, et que $\omega \mapsto f_\omega(x)$ appartienne à $\mathcal{L}^1$ pour tout x dans V (*). Alors $f(x) = \int f_\omega(x)\,\mu(d\omega)$ a un sens et appartient à $]-\infty, \infty]$ pour tout x dans E,, et f est convexe ; de plus $\omega \mapsto f'_\omega(x_0, h)$ appartient à $\mathcal{L}^1$ pour tout $h \in E$, et $f'(x_0,h) = \int f'_\omega(x_0,h)\,\mu(d\omega)$.

Démonstration :

Si $x \notin V$ on a pour un $\alpha \in]0, 1[$, $\alpha x_0+(1-\alpha)x \in V$.
On a $(1-\alpha)\, f_\omega(x) \geq f_\omega(\alpha x_0 + (1-\alpha)x) - \alpha f_\omega(x_0)$, ce qui prouve que $\omega \mapsto f_\omega(x)$ est minorée par une fonction intégrable. Donc f a un sens et $f(x) > -\infty$. La convexité de f est évidente. Soit $h \in E$. Soit $\lambda > 0$ assez petit pour que $x_0 + [-\lambda, \lambda]\, h \subset V$.
Pour $\alpha \in]0, \lambda]$ on a, $\forall \omega$:

$$\frac{f_\omega(x_0) - f_\omega(x_0-\lambda h)}{\lambda} \leq \frac{f_\omega(x_0+\alpha h) - f_\omega(x_0)}{\alpha} \leq \frac{f_\omega(x_0+\lambda h) - f_\omega(x_0)}{\lambda}$$

Si (α_n) est une suite dans $]0, \lambda]$, tendant vers 0, on peut appliquer le théorème de Lebesgue à l'intégrale $\int \frac{f_\omega(x_0+\alpha_n h)-f_\omega(x_0)}{\alpha_n}\,\mu(d\omega)$ qui est égale à $\frac{f(x_0+\alpha_n h)-f(x_0)}{\alpha_n}$. Il en résulte que $x \mapsto f'_\omega(x_0, h)$ est intégrable, et que $f'(x_0, h) = \int f'_\omega(x_0, h)\,\mu(d\omega)$.

2.11 THEOREME.

Sous les hypothèses du lemme précédent, si E est un e.v.t., si les fonctions f_ω et f sont continues en x_0 et s'il existe

---

(*) L'enveloppe convexe de V, qui est un voisinage de x_0 pour la topologie localement convexe la plus fine, a la même propriété.

une suite dans E séparant les points de E', alors $x' \in \partial f(x_o)$ équivaut à : il existe une section scalairement mesurable, σ, de la multi-application $\omega \mapsto \partial f_\omega(x_o)$ telle que $x' = \int \sigma(\omega)\ \mu(d\omega)$

REMARQUE.

Le dual de E' faible s'identifie à un quotient de E (d'après BOURBAKI [6] ch. II § 6 n° 2 prop. 3, p. 91), mais il n'y a aucun inconvénient à utiliser E lui-même, au lieu de ce quotient, pour la dualité et les fonctions d'appui de parties de E'.

Démonstration :

Par hypothèse les ensembles $\partial f_\omega(x_o)$ et $\partial f(x_o)$ sont faiblement compacts. La multi-application $\omega \mapsto \partial f_\omega(x_o)$ est scalairement intégrable et on peut appliquer le théorème 1.19. D'après le théorème 5 (*) les fonctions d'appui de $\partial f_\omega(x_o)$ et $\partial f(x_o)$ sont données par les dérivées directionnelles de f_ω et f. L'ensemble A_Ω du théorème 1.19, a priori contenu dans $\hat{E}'$ (complété faible de E'), est identique à $\partial f(x_o)$ car il a même fonction d'appui (c'après le lemme 10). Le théorème en résulte.

2.12 REMARQUES.

1) Ce résultat est énoncé par GOL'STEIN (th. 7) sous des hypothèses plus restrictives. (En effet, pour Gol'stein E est un Banach séparable, Ω est un espace topologique séparé ; $\mathcal{A}$ sa tribu borélienne, μ une mesure bornée et l'application $(\omega, x) \mapsto f_\omega(x)$ a des propriétés de continuité plus fortes que nos hypothèses). Il a été démontré par LEVIN dans le cas d'un Banach séparable.

(*) Le théorème 5 est tout à fait classique pour les fonctions numériques cf. MOREAU.

2) Pour la somme de deux fonctions, ce résultat, assez trivial si les deux fonctions sont continues, est vrai si une seule des deux fonctions est continue en un point et l'autre SCI sur E, et cela sans hypothèse de séparabilité (MOREAU § 10 d p. 62)

§ 4. SOUS-DIFFERENTIEL D'UNE BORNE SUPERIEURE DE FONCTIONS CONVEXES.

2.13 On note $\overline{\gamma}$ l'enveloppe convexe fermée.

THEORÈME.

Soit E un e.v.t. et $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de fonctions convexes sur E. Soit $f = \sup f_\alpha$. On suppose f finie et continue en x_0. Désignons pour $\eta \in \mathbb{R}_+$, par A_η l'ensemble $\{\alpha \in A \mid f_\alpha(x_0) \geq f(x_0) - \eta\}$. Soit $\mathcal{V}$ un système fondamental de voisinages de O. Alors (E' étant muni de $\sigma(E', E)$), on a :

$$\partial f(x_0) = \bigcap_{\substack{\eta>0 \\ V\in\mathcal{V}}} \overline{\gamma}\{\partial f_\alpha(x) \mid \alpha \in A_\eta,\ x \in x_0+V\}.$$

REMARQUE.

Comme f est majorée sur un voisinage de x_0, toutes les f_α (même si $f_\alpha(x_0) = -\infty$), sont continues dans un voisinage ouvert de x_0 indépendant de α. La valeur de $\partial f_\alpha(x)$ lorsque $f_\alpha(x) = \infty$ ou $-\infty$ peut être choisie de façon arbitraire.

Démonstration :

Pour montrer l'égalité des deux membres, qui sont des convexes fermés, il suffit de montrer que les demi-espaces fermés qui les contiennent sont les mêmes. En vertu du théorème 5 et de la remarque 11 cela va s'exprimer avec les dérivées directionnelles.

1) Montrons l'inclusion de gauche à droite, ou encore que

$\forall \eta > 0$ et $\forall V \in \mathcal{V}$, $\partial f(x_0) \subset \overline{\gamma}\{ \partial f_\alpha(x) | \alpha \in A_\eta , x \in x_0 + V\}$.

Pour cela on va montrer que pour η et V donnés, $h \in E$ et $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha \in A_\eta$ et $x \in x_0+V$ tels que $f'_\alpha(x,h) \geq f'(x_0,h) - \varepsilon$. Soit $k \in]0\ 1]$ assez petit pour que $k h \in V$ et que

$$\frac{f(x_0 + 2kh) - f(x_0)}{2k} \leq f'(x_0, h) + \frac{\eta}{4} \qquad (1)$$

Soit $x = x_0 + kh$. Prenons α tel que

$$f(x) - f_\alpha(x) \leq \frac{\eta}{4} \qquad (2)$$

et

$$f(x) - f_\alpha(x) \leq k\varepsilon \quad . \qquad (3)$$

Posons $x_1 = x_0 + 2kh$. De (1) résulte

$f_\alpha(x_1) \leq f(x_0) + 2kf'(x_0, h) + \frac{\eta}{2}$ (on a $f_\alpha(x_1) \leq f(x_1)$ et $k \leq 1$)

et de (2) $f_\alpha(x) \geq f(x_0) + kf'(x_0,h) - \frac{\eta}{4}$.

En reportant ces inégalités dans la relation $f_\alpha(x_0) \geq 2f_\alpha(x) - f_\alpha(x_1)$, on trouve $f_\alpha(x_0) \geq f(x_0) - \eta$, ce qui signifie $\alpha \in A_\eta$. Alors en utilisant (3) on obtient :

$$f'_\alpha(x, h) \geq \frac{f_\alpha(x) - f_\alpha(x_0)}{k} \geq \frac{f_\alpha(x) - f(x_0)}{k} \geq \frac{f(x) - f(x_0)}{k} - \varepsilon \geq f'(x_0,h) - \varepsilon .$$

2) Pour montrer l'inclusion de droite à gauche, il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ et $V \in \mathcal{V}$ tels que $\sup\{f'_\alpha(x, h)|\alpha \in A_\eta , x \in x_0+ V\} \leq f'(x_0, h) + \varepsilon$. Soit V_0 un voisinage symétrique de 0 et $M \in \mathbb{R}$, tels que f soit majorée par M sur $x_0+ V_0$. Soit $k > 0$ tel que f soit continue en $x_1 = x_0+kh$ et que $\dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{k} \leq f'(x_0, h) + \dfrac{\varepsilon}{2}$.

Soit $\xi = \frac{k\varepsilon}{4}$. Soit V_1 un voisinage de 0 tel que f soit majorée par $f(x_1) + \xi$ sur $x_1 + V_1$. Soit $\eta > 0$ et $\rho > 0$ (les choisir dans cet ordre) tels que $\eta + \rho(M - f(x_0) + \eta) \leq \xi$. De par

ce choix si $x - x_o \in \rho\, V_o$ et $\alpha \in A_\eta$, on a $f_\alpha(x) \geq f(x_o) - \xi$.
En effet, posons $y = x_o - \dfrac{x - x_o}{\rho}$. Alors on a $x_o = \dfrac{1}{1+\rho}\, x + \dfrac{\rho}{1+\rho}\, y$ et $y \in x_o + V_o$.

On a donc $f_\alpha(y) \leq M$, et on a aussi $f_\alpha(x_o) \geq f(x_o) - \eta$.
En reportant ces deux inégalités dans $f_\alpha(x) \geq (1+\rho)\, f_\alpha(x_o) - \rho\, f_\alpha(y)$ (qui résulte de l'inégalité de convexité $f_\alpha(x_o) \leq \frac{1}{1+\rho} f_\alpha(x) + \frac{\rho}{1+\rho} f_\alpha(y)$) on obtient bien $f_\alpha(x) \geq f(x_o) - \xi$. Alors soit $V \in \mathcal{V}$ contenu dans $\rho\, V_o \cap V_1$. Si $\alpha \in A_\eta$ et $x \in x_o + V$, on a encore $f_\alpha(x) \geq f(x_o) - \xi$, et on a aussi $x + kh = x_o + kh + (x - x_o) \in x_1 + V_1$, donc $f_\alpha(x+kh) \leq f(x_1) + \xi$. Finalement

$$f'_\alpha(x, h) \leq \frac{f_\alpha(x+kh) - f_\alpha(x)}{k} \leq \frac{f(x_1) - f(x_o) + 2\xi}{k}$$

$$\leq f'(x_o, h) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2\xi}{k} = f'(x_o, h) + \varepsilon .$$

<u>REMARQUES.</u>

1) Le fait qu'interviennent d'autres α que ceux pour lesquels $f_\alpha(x_o) = f(x_o)$ n'est pas étonnant (il se peut même que $f_\alpha(x_o) < f(x_o)$ pour tout α).

2) Pour ce qui est des x autres que x_o, voici un exemple : $E = \mathbb{R}$, $A =]1, 2]$, $f_\alpha(x) = |x|^\alpha$. Alors pour $x_o = 0$, $\partial f_\alpha(0) = \{0\}$, mais $f(x) = |x|$ si $x \in [-1, 1]$, de sorte que $\partial f(0) = [-1, 1]$.
Cela montre que le th. 2 de LEVIN est faux.

2.14 Les deux théorèmes suivants donnent un cas important où la formule se simplifie.

<u>THEOREME.</u>

<u>Sous les hypothèses du théorème 13, si</u> A <u>est compact, s'il existe un voisinage</u> U <u>de</u> x_o <u>tel que</u> $(\alpha, x) \mapsto f_\alpha(x)$ <u>soit finie et</u>

continue sur $A \times U$, alors f est finie et continue sur U et

$$\partial f(x_o) = \overline{\gamma} \{\partial f_\alpha(x_o) | \alpha \in A_o\} .$$

Démonstration :

La continuité de f résulte du théorème du maximum de BERGE. Le théorème 13 signifie que, pour tout $h \in E$, $f'(x_o,h) = \overline{\lim_{\mathcal{F}}} f'_\alpha(x,h)$ (la valeur de $f'_\alpha(x, h)$ si $f_\alpha(x)$ n'est pas fini n'a pas d'importance), où $\mathcal{F}$ est le filtre sur $A \times E$ produit du filtre engendré par les A_η $(\eta > 0)$ et du filtre des voisinages de x_o. La fonction $(\alpha, x) \to f'_\alpha(x, h)$ est SCS sur $A \times \overset{\circ}{U}$, car borne inférieure de fonctions continues (les fonctions $(\alpha, x) \mapsto \dfrac{f_\alpha(x+\lambda h)-f_\alpha(x)}{\lambda}$, $\lambda > 0$). Alors on prend un filtre $\mathcal{F}_1$ plus fin que $\mathcal{F}$ tel que $\lim_{\mathcal{F}_1} f'_\alpha(x,h) = f'(x_o,h)$, et un ultrafiltre $\mathcal{U}$ plus fin que $\mathcal{F}_1$. En désignant par $\overline{\alpha}$ la limite de α suivant $\mathcal{U}$, on obtient $f_{\overline{\alpha}}(x_o) = f(x_o)$ et $f'(x_o, h) \leq f'_{\overline{\alpha}}(x_o, h)$ ce qui établit l'inclusion $\partial f(x_o) \subset \overline{\gamma}\{\partial f_\alpha(x_o) | \alpha \in A_o\}$, donc le théorème.

REMARQUE.

Ce théorème a été établi par PSHENICHNYI [1] dans le cas où E est normé et les f_α dérivables au sens de Gâteaux.

2.15 Voici un résultat un peu plus fort dû à R.T. Rockafellar.

THEOREME.

Soit E un e.v.t., U un ouvert de E, A un compact, $(f_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille de fonctions convexes sur E, et $x_o \in U$. Soit $f = \sup f_\alpha$. On suppose $\alpha \to f_\alpha(x)$ finie et continue sur A pour tout $x \in U$. Alors

1) $f'(x_o, h) = \max \{f'_\alpha(x_o, h) | \alpha \in A_o\}$, où

$$A_o = \{\alpha \in A \mid f_\alpha(x_o) = f(x_o)\} .$$

2) <u>si pour tout</u> α , f_α <u>est continue en</u> x_o, <u>ou dérivable au sens de Gâteaux,</u> $\partial f(x_o) = \overline{\gamma}\{\partial f_\alpha(x_o) \mid \alpha \in A_o\}$.

<u>Démonstration</u> :

1) D'abord remarquons que l'on peut écrire max , car $\alpha \mapsto f'_\alpha(x_o, h)$ est SCS et A_o est compact. Pour tout $\alpha \in A_o$ on a évidemment $f'_\alpha(x_o, h) \leq f'(x_o, h)$, donc $\max\{f'_\alpha(x_o,h) \mid \alpha \in A_o\} \leq f'(x_o,h)$. On va montrer l'inégalité inverse. Pour cela soit $\beta < f'(x_o, h)$. Pour $\lambda > 0$ on a $\dfrac{f(x_o+\lambda h) - f(x_o)}{\lambda} \geq f'(x_o, h) > \beta$, d'où $B_\lambda = \{\alpha \in A \mid \dfrac{f_\alpha(x_o+\lambda h) - f(x_o)}{\lambda} \geq \beta\} \neq \phi$.

Soit $\lambda_o > 0$ assez petit pour que $x_o + [0, \lambda_o]h \subset U$. Supposons $\lambda \in]0, \lambda_o]$. Alors B_λ est compact (à cause de la continuité en α) et croît avec λ (à cause de la convexité et du fait que $f(x_o) \geq f_\alpha(x_o)$) . Ainsi il existe $\overline{\alpha}$ appartenant à $\bigcap_{\lambda>0} B_\lambda$. On a $\forall \lambda \in]0, \lambda_o]$ $f_{\overline{\alpha}}(x_o+\lambda h) \geq f(x_o) + \lambda\beta$, d'où , à la limite, $f_{\overline{\alpha}}(x_o) \geq f(x_o)$. Donc $\overline{\alpha} \in A_o$, et comme $\dfrac{f_{\overline{\alpha}}(x_o+\lambda h) - f_{\overline{\alpha}}(x_o)}{\lambda} \geq \beta$, pour tout $\lambda \in]0, \lambda_o]$, on a $f'_{\overline{\alpha}}(x_o, h) \geq \beta$.

2) Dans ce cas, d'après le théorème 5, pour tout α $f'_\alpha(x_o, h) = \max\{\langle x', h\rangle \mid x' \in \partial f_\alpha(x_o)\}$. Il en résulte d'après le 1), que pour $h \in E$, il existe $x' \in \bigcup_{\alpha \in A_o} \partial f_\alpha(x_o)$ tel que $\langle x', h\rangle = f'(x_o, h)$. Comme

$$\partial f(x_o) = \{x' \in E' \mid \forall h \in E, \langle x', h\rangle \leq f'(x_o, h)\} ,$$

cela prouve que $\partial f(x_o) \subset \overline{\gamma}\{\partial f_\alpha(x_o) \mid \alpha \in A_o\}$.

Et l'inclusion inverse est triviale.

2.16 PROPOSITION.

Sous les hypothèses du théorème 15 supposons, quel que soit $\alpha \in A_o$, f_α dérivable au sens de Gâteaux en x_o, de dérivée $\sigma(\alpha)$. Alors $\sigma : A_o \to E'$ est faiblement continue, et $x' \in \partial f(x_o)$ si et seulement si il existe une probabilité de Radon μ sur A_o telle que $\int \sigma(\alpha)\ \mu(d\alpha) \in E'$ (restriction inutile si on sait que $\partial f(x_o)$ est faiblement compact) et que $x' = \int \sigma(\alpha)\ \mu(d\alpha)$.

Démonstration :

On a, pour tout $\alpha \in A_o$, $\langle\sigma(\alpha), h\rangle = f'_\alpha(x_o, h)$, et $\alpha \mapsto f'_\alpha(x_o, h)$ est SCS (car borne inférieure de fonctions continues). Mais comme cela est vrai aussi pour $-h$, σ est scalairement continue. Désignons par $\mathcal{M}^1_+(A_o)$ l'ensemble des probabilités de Radon sur A_o , muni de la topologie vague. Alors l'application $\mu \mapsto \int \sigma\mu$ est faiblement continue de $\mathcal{M}^1_+(A_o)$ dans $\hat{E}'$ (complété faible), car

$$\langle\int \sigma\mu, h\rangle = \int \langle\sigma(\alpha), h\rangle\ \mu(d\alpha) .$$

Par suite $\{\int \sigma\mu \mid \mu \in \mathcal{M}^1_+(A_o)\}$ est un convexe faiblement compact de $\hat{E}'$ et il contient $\sigma(A_o)$. Alors d'après le 2) du théorème 15, sa trace sur E' est identique à $\partial f(x_o)$.

REMARQUE.

Ce résultat a été établi par PSHENICHNYI ([1] th. 1.6 p. 51) sous les hypothèses citées dans la remarque 14.

2.17 LEMME.

Soit F un e.l.c.s. K un compact, Γ une multi-application SCS de K dans les convexes compacts non vides de F . On suppose que K ou $\bigcup\{\Gamma(\alpha) \mid \alpha \in K\}$ est métrisable. Soit $\overline{\gamma}\{\Gamma(\alpha) \mid \alpha \in K\}$ l'enveloppe convexe fermée dans $F'^* = \hat{F}$ (complété faible) de $\bigcup\{\Gamma(\alpha) \mid \alpha \in K\}$.

<u>Alors</u> $x \in \overline{\gamma}\{\Gamma(\alpha) \mid \alpha \in K\}$ <u>équivaut à "il existe une probabilité de Radon</u> μ, <u>sur</u> K, <u>et une section,</u> σ, <u>scalairement μ-mesurable de</u> Γ, <u>telles que</u> $x = \int \sigma(\alpha)\ \mu(d\alpha)$ (<u>intégrable faible</u>)".

<u>Démonstration</u> :

La suffisance est assez claire. Montrons la nécessité. Soit $B = \bigcup\{\Gamma(\alpha) \mid \alpha \in K\}$. C'est un compact. Soit G le graphe de Γ. C'est une partie compacte de $K \times B$. Soit $\mathcal{M}_+^1(G)$ l'ensemble des probabilités de Radon sur G. On définit $b : \mathcal{M}_+^1(G) \to \hat{F}$, en posant

$$\langle x', b(\lambda)\rangle = \int_G \langle x', x\rangle\ \lambda(d(\alpha, x)).$$

L' application b est vaguement continue et l'on a $b(\delta_{(\alpha,x)}) = x$. Il en résulte que $b(\mathcal{M}_+^1(G))$ contient $\bigcup\{\Gamma(\alpha) \mid \alpha \in K\}$, et comme il est convexe, $\sigma(\hat{F}, F')$ compact, il est égal à $\overline{\gamma}\{\Gamma(\alpha) \mid \alpha \in K\}$. Ainsi si $x_o \in \overline{\gamma}\{\Gamma(\alpha) \mid \alpha \in K\}$ il existe $\lambda \in \mathcal{M}_+^1(G)$ telle que $x_o = b(\lambda)$. Soit $p : G \to K$ la projection et μ l'image de λ par p. Il existe toujours une désintégration $(\lambda_\alpha)_{\alpha \in K}$ telle que λ_α soit portée par $p^{-1}(\alpha)$. En effet, si K est métrisable cela résulte de IONESCU TULCEA (A. et C.) th. 3 p. 461, et si B est métrisable cela résulte d'un théorème de Mokobodzki (cf. IONESCU TULCEA (C.) th. 2, p. 379). Alors l'égalité $\sigma(\alpha) = b(\lambda_\alpha)$ définit une section scalairement mesurable de Γ. En effet, comme $p^{-1}(\alpha) = \{\alpha\} \times \Gamma(\alpha)$, $b(\lambda_\alpha) \in \Gamma(\alpha)$ et

$$\alpha \mapsto \langle x', \sigma(\alpha)\rangle = \int_G \langle x', x\rangle\ \lambda_\alpha(d(\beta, x))$$

est μ-mesurable.

Enfin $\langle x', \int_K \sigma(\beta)\ \mu(d\beta)\rangle$

$$= \int_K \langle x', \sigma(\beta)\rangle\ \mu(d\beta)$$

$$= \int_K \left[\int_G \langle x', x\rangle\ \lambda_\beta(d(\alpha, x))\right] \cdot \mu(d\beta)$$

$$= \int_G \langle x', x\rangle\ \lambda(d(\alpha, x)) = \langle x', x_o\rangle$$

C.Q.F.D.

2.18 THEOREME.

Sous les hypothèses du théorème 15, la multi-application $\alpha \mapsto \partial f_\alpha(x_o)$ est faiblement SCS. Si l'on suppose A_o métrisable ou $\bigcup\{\partial f_\alpha(x_o) | \alpha \in A_o\}$ faiblement métrisable (*) " $x' \in \partial f(x_o)$ " équivaut à " il existe une probabilité de Radon, μ , sur A_o et une section scalairement μ-mesurable, σ , de la multi-application $\alpha \mapsto \partial f_\alpha(x_o)$, telles que $\int \sigma(\alpha)\ \mu(d\alpha) \in E'$ (précision inutile si on sait que $\partial f(x_o)$ est faiblement compact) et que $x' = \int \sigma(\alpha)\ \mu(d\alpha)$ " .

Démonstration :

Elle résulte du lemme précédent, sauf la semi-continuité. On peut utiliser le lemme de Castaing (lemme 1.24), ou bien utiliser le fait que $\alpha \mapsto \partial f_\alpha(x_o)$ est de graphe fermé. En effet : les fonctions $\alpha \to f'_\alpha(x_o,h)$ sont SCS, et l'on a $\partial f_\alpha(x_o) = \{x' \in E' |\ h \in E, \langle x', h\rangle \leq f'_\alpha(x_o, h)\}$: De plus les $\partial f_\alpha(x_o)$ restent contenus dans un faiblement compact du complété faible de E'. La SCS en résulte (cf. BERGE).

REMARQUE.

LEVIN a établi ce résultat dans le cas d'un Banach séparable par une méthode très différente.

§ 5. APPLICATION.

2.19 Nous montrons comment le théorème 18 permet d'étendre des résultats de PSHENICHNYI [2].

Pshenichnyi a considéré le cas $A = [0, T]$, $E = \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n)$,

---

(*) Cela est vrai s'il existe une suite dans E séparant les points de E'.

$f_\alpha(x) = g(x(\alpha))$, où g est une fonction convexe finie sur $\mathbb{R}^n$, supposée de classe C^2. Le but de Pshenichnyi est de donner un théorème du maximum, type Pontryagin, pour un système linéaire : $\dot{x} = Ax + Bu$, avec contrainte sur l'état : $g(x(t)) \leq 0$ pour tout $t \in [0, T]$. (cette contrainte se met donc sous la forme $f(x) \leq 0$). Pshenichnyi considère un critère du type $\sup\limits_{t \in [0,T]} g_1(x(t))$, du même type que la contrainte, mais cela n'a rien d'essentiel, et il utilise son théorème (cf. la prop. 16). Le théorème 18 permet de ne plus supposer g de classe C^2.

PROPOSITION.

Soit $g : \mathbb{R}^n \times [0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, convexe par rapport à la première variable. On pose (pour $X \in \mathscr{C}_u([0,T], \mathbb{R}^n)$) $f_t(X) = g(X(t), t)$ et $f(X) = \sup \{f_t(X) | t \in [0, T]\}$. Ces fonctions sont convexes. Soit $X_0 \in \mathscr{C}_u([0, T], \mathbb{R}^n)$. Alors $\partial f_t(X_0) = \partial g(X_0(t), t) \otimes \delta_t$ (*). Toute section borélienne, σ, de la multi-application $t \mapsto \partial f_t(X_0)$ est de la forme $\sigma(t) = \xi(t) \otimes \delta_t$, où $\xi(t) \in \partial g(X_0(t), t)$ pour tout t et $\xi : [0, T] \to (\mathbb{R}^n)$, est borélienne.

Démonstration :

Remarquons que l'application $(t, X) \mapsto X(t)$ est continue de $[0, T] \times \mathscr{C}_u([0, T], \mathbb{R}^n)$ dans $\mathbb{R}^n$. Les hypothèses du théorème 14 sont vérifiées, et par suite les f_t et f sont continues sur $\mathscr{C}_u([0, T], \mathbb{R}^n)$. Montrons que $\partial f_t(X_0) = \partial g(X_0(t), t) \otimes \delta_t$.

On a
$$f'_t(X_0, Y) = \lim_{\lambda \to +0} \frac{g(X_0(t) + \lambda Y(t), t) - g(X_0(t), t)}{\lambda}$$
$$= \sup \{\langle \xi, Y(t)\rangle | \xi \in \partial g(X_0(t), t)\}$$
$$= \sup \{\langle \lambda, Y\rangle | \lambda \in \partial g(X_0(t), t) \otimes \delta_t\}.$$

(*) On note δ_t la masse de Dirac en t.

Comme l'application $\xi \mapsto \xi \otimes \delta_t$ de $(\mathbb{R}^n)'$ dans $\mathcal{M}_{(\mathbb{R}^n)'}([0, T])$ est vaguement continue, $\partial g(X_o(t), t) \otimes \delta_t$ est vaguement compact, et l'égalité précédente entraîne $\partial f_t(X_o) = \partial g(X_o(t), t) \otimes \delta_t$. Enfin soit $\sigma(t) = \xi(t) \otimes \delta_t$. Pour que σ soit vaguement borélienne il faut et il suffit (th. 0.10) que $t \mapsto \langle\sigma(t), \varphi\rangle$ soit borélienne pour toute $\varphi \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n)$. Or $\langle\sigma(t), \varphi\rangle = \langle\xi(t), \varphi(t)\rangle$ et il faut et il suffit que ξ soit borélienne (pour établir la nécessité on peut prendre φ constante, parcourant une base de $\mathbb{R}^n$).

2.20 COROLLAIRE.

La relation " $\lambda \in \partial f(X_o)$ " équivaut à " il existe une section borélienne ξ de la multi-application $t \mapsto \partial g(X_o(t), t)$ et une probabilité μ sur $[0, T]$ portée par A_o $(= \{t | f_t(X_o) = f(X_o)\})$ telles que $\lambda = \int(\xi(t) \otimes \delta_t)\, \mu(dt)$. Alors si $Y \in \mathcal{C}([0, T], \mathbb{R}^n)$ on a $\langle\lambda, Y\rangle = \int \langle\xi(t), Y(t)\rangle\, \mu(dt)$.

REMARQUES.

1) Si l'on se donne comme contrainte $X(t) \in C$, pour tout t, où C est un convexe fermé d'intérieur non vide, il existe une fonction convexe g sur $\mathbb{R}^n$ telle que $C = \{x | g(x) \leq 0\}$, et que $0 \notin \partial g(x)$ en tout point frontière de C. Alors en un point frontière x les éléments de $\partial g(x)$ sont des homothétiques de rapport positif de vecteurs normaux à C en x. Dans cet ordre d'idées cf. ROCKAFELLAR [3] th. 2 p. 44.

2) Les contraintes sur l'état pour les systèmes de commande non linéaires ont été étudiées par NEUSTADT et WARGA. Le cas linéaire permet de donner des démonstrations plus courtes et d'enlever des hypothèses de dérivabilité.

BIBLIOGRAPHIE.

AHMAD (S.). Eléments aléatoires dans les espaces vectoriels topologiques. Annales IHP section B II-2 (1965) 95-135.

AUMANN (R.J.).

[1]. Integrals of set valued functions. J. Math. An. Appl. 12 (1965) 1-12.

[2]. Measurable utility and the measurable choice theorem. Jerusalem (1967) Polycopié.

BERGE (C.). Espaces topologiques. Fonctions multivoques. Dunod (1959).

BLACKWELL (D.). The range of certain vector integrals. Proc. A.M.S. 2-3 (1951) 390-395.

BOURBAKI (N.).

[1]. Théorie des ensembles. Ch. 3 1ère éd.

[2]. Théorie des ensembles. Ch. 4 1ère éd.

[3]. Algèbre. Ch. 6 , 7 1ère éd.

[4]. Topologie générale. Ch. 1 , 2 3ème éd.

[5]. Topologie générale. Ch. 9 2ème éd.

[6]. Espaces vectoriels topologiques. Ch. 1, 2 2ème éd.

[7]. Espacesvectoriels topologiques. Ch. 3, 4, 5 1ère éd.

[8]. Intégration. Ch. 1, 2, 3, 4 2ème éd.

[9]. Intégration. Ch. 5 2ème éd.

[10]. Intégration. Ch. 6 1ère éd.

CARTIER (P.), FELL(J.M.G.), MEYER (P.A.). Comparaison des mesures portées par un ensemble convexe compact. Bull. S.M.F. 92 (1964) 435-445.

CASTAING (Ch.).

[1]. Sur une extension du théorème de Ljapunov C.R. 260 (1965) 3838-3841.

[2]. Sur une nouvelle extension du théorème de Ljapunov C.R. 264 (1967) 333-336.

[3] Sur les multi-applications mesurables
Revue Inf. Rech. Op. 1 (1967) 91-126.

[4] Sur un théorème de représentation intégrale lié à la comparaison des mesures.
C.R 264 (1967) 1059-1062.

[5] Sur les multi-applications mesurables.
Thèse Caen (1967).

[6] Sur la mesurabilité du profil d'un ensemble convexe compact variant de façon mesurable.
Perpignan (mai 1968). Polycopié.

[7] Proximité et mesurabilité.
Séminaire d'analyse unilatérale N°1. Montpellier (1968).

[8] Le théorème de Dunford-Pettis généralisé.
Montpellier (1968-69) Publication n° 43.

[9] Le théorème de Dunford-Pettis généralisé.
C.R. 268 (1969) 327-329.

[10] Un théorème de compacité faible dans L^1_E. Applications...
Montpellier (1968-69). Publication n° 44.

CASTAING (Ch.) VALADIER (M.).

[1] Equations différentielles multivoques dans les espaces vectoriels localement convexes.
Revue Inf. Rech. Op. 16 (1969) 3-16.

[2] Equations différentielles multivoques dans les espaces localement convexes.
C.R. 266 (1968) 985-987.

CHOQUET (G.). Le théorème de représentation intégrale dans les ensembles convexes compacts.
Ann. Inst. Fourier 10 (1960) 333-344.

DEBREU (G.). Integration of correspondences. 5 th Berkeley Symposium on Math. Stat. Prob. Vol II part I 351-372.

DEBREU (G.), SCHMEIDLER (D.). The Radon-Nikodym derivative of a correspondence. (A paraître).

DELLACHERIE (C.). Ensembles aléatoires.
Séminaire de Prob. III. Springer n° 88.

DINCULEANU (N.). Vector measures. Pergamon Press (1967).

DUNFORD (N.), SCHWARTZ (J.T.). Linear operators. Part I John Wiley (1964).

DVORETZKY (A.), WALD(A.), WOLFOWITZ (J.). Relations among certain ranges of vector measures. Pac. J. Math. 1 (1951) 59-74.

FERNIQUE (X.). Processus linéaires. Processus généralisés. Ann. Inst. Fourier 17-1 (1967) 1-92.

FILIPPOV (A.F.). On certain questions in the theory of optimal control. Siam. J. Control 1 (1962) 76-84.

GHOUILA-HOURI (A.). Cônes de Banach. Application aux probleèmes de contrôle. Polycopié.

GOL'STEIN (E.G.). Problems of best approximation by convex set elements and some properties of supporting functional. Soviet Math. 8-2 (1967) 504-507.

GROTHENDIECK (A.). Espaces vectoriels topologiques. Sao Paulo (1964). 3ème éd.

HALKIN (H.), HENDRICKS (E.C.). Subintegrals of set valued functions with semi-analytic graphs. Pr. Nat. Ac. Sc. USA 59-2 (1968) 365-337.

HERVE (M.). Sur les représentations intégrales à l'aide des points extrémaux dans un ensemble compact convexe métrisable. C.R. 253 (1961) 366-368.

HIMMELBERG (C.J.), JACOBS (M.Q.), VAN VLECK (F.S.). Measurable multifunction, selectors and Filippov's implicit functions lemma. J.Math. An. Appl. 25-2 (1969) 276-284.

HIMMELBERG (C.J) VAN VLECK (F.S.). Some selection theorems for measurable functions. Can. J. Math. XXI-2 (1969) 394-399.

HÖRMANDER (L.). Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe. Arkivför Math. 3-12 (1954) 181-186.

HUKUHARA (M.). Intégration des applications mesurables dont la valeur est un compact convexe. Funkcialaj Ekvacioj 10 (1967) 205-223.

IOFFE (A.D.), TIHOMIROV (V.M.). Dualité des fonctions convexes et problèmes d'extremum. Uspehi Math. N. 23-6 (1968) 51-116.

IONESCU-TULCEA (A.). Sur la domination des mesures et la désintégration des mesures.
C.R. 262 (1966) 1442-1445.

IONESCU-TULCEA (A. et C.). On the lifting property (IV) Desintegration of measures.
Ann. Inst. Fourier 14-2 (1964) 445-472.

IONESCU-TULCEA (C.). Two theorems concerning the desintegration of measures.
J. Math. An. Appli. 26 (1969) 376-380.

JACOBS (M. Q.). Measurable multivalued mappings and Lusin's theorem.
Tr. AMS 134-3(1968) 471-481.

KARLIN (S.). On extreme points of vector functions.
Pr. Am. Math. Soc. 4 (1953) 603-610.

KARLIN (S.), STUDDEN (W.J.). Tchebycheff systems : with applications in analysis and statistics. John Wiley (1966).

KELLERER(H.G.). Bemerkung zu einem Satz von H. Richter.
Archiv der Math. 15 (1964) 204-207.

KINGMAN (J.F.C.), ROBERTSON (A.P.). On a theorem of Lyapunov.
J. London Math. Soc. 43 (1968) 347-351.

KLEE (V.), OLECH (C.). Characterizations of a class of convex sets.
Math. Scand. 20-2 (1967) 290-296.

KUDO (H.) Dependant experiment and sufficient statistics. Nat. Sc. Report, Ochanomizu Univ. 4-2 (1953) 151-163.

KURATOWSKI (K.), RYLL-NARDZEWSKI (C.). A general theorem on selectors.
Bull. Ac. Pol. Sc. 13 (1965) 397-403.

LEVIN (V.L.). Sur quelques propriétés des fonctions d'appui
Math. zametki 4-6 (1968) 685-696.

LINDENSTRAUSS (J.). A short proof of Liapounoff's convexity theorem.
J. of Math. and Mech. 15-6 (1966) 971-972.

MEYER (P.A.). Probabilités et potentiel.
Hermann (1966).

MICHAEL (E.)

[1] Topologies on spaces of substets.
Tr. A.M.S. 71 (1951) 152-182.

[2] Continous selections I.
Ann. of Math. 63-2 (1956) 361-382.

MOREAU (J.J.). Fonctionnelles convexes. Séminaire sur les équations aux dérivées partielles II. Collège de France. 1966-67.

NEVEU (J.). Bases mathématiques du calcul des probabilités. Masson (1964

VON NEUMANN (J.). On rings of operators. Reduction theory.
Ann. of Math. 50 (1949) 401-485.

NEUSTADT (L.W). An abstract variational theory with applications to a broad class of optimization prolems. II. Applications.
Siam J. Control 5-1 (1967) 90-137.

NOVIKOFF (P.). Sur les fonctions implicites mesurables B.
Fund. Math 17 (1931) 8-25.

OLECH (C.)

[1] A note concerning set valued measurable functions.
Bull. Ac. Pol. Sc. 13-4 (1965) 317-321.

[2] Extremal solutions of a control system.
J. of Diff. Eq. 2-1 (1966) 74-101.

PARTHASARATY (K.R.) Probability measures on metric spaces. Academic Press (1967).

PERESSINI (A.L.). Ordered topological vector spaces. Harper et Row (1967)

PLIS (A.). Remark on measurable set valued functions.
Bull. Ac. Pol. Sc. 9-12 (1961) 857-859.

PSHENICHNYI (B.N.).

[1] Convex programming in a normalized space.
Cybernetics 1-5 (1965) 46-57.

[2] Linear optimal control problems.
Siam J. Control 4-4 (1966) 577-593.

RAFFIN (C.). Contribution à l'étude des programmes convexes définis dans des espaces vectoriels topologiques. Thèse Paris (1969).

RICHTER (H.)

[1] Verallgemeinerung eines in der Statistik benötigten Satzes der Masstheorie.
Math. Ann. 150 (1963) 85-90.

[2] Beweisergänzung zu der Arbeit Hans Richter...
Math. Ann. 150 (1963) 440-441.

RIEFFEL (M.A.). The Radon-Nikodym theorem for the Bochner integral. Tr. AMS. 131-2 (1968) 466-487.

ROCKAFELLAR (R.T).

[1] Integrals which are convex functionals Pacific J. Math 24-3 (1968) 525-539.

[2] Measurable dependance of convex sets and functions on parameters. J. Math. An. Appl. 28-1 (1969) 4-25.

[3] Convex functions, monotone operators and variational inequalities. Proc. NATO Adv. Study Institute (1968) p. 35-65.

ROGERS (C.A) WILLMOTT (R.C). On the uniformization of sets in topological spaces. Acta mathematica 120-1-2 (1968) 1-52.

ROHLIN (V.A.) Selected topics form the metric theory of dynamical systems. Uspehi Mat. N. 4 (1949) n° 2 (30) 57-128 (en russe) American Math. Soc' Translations vol 49 serie 2 p. 171-240 (en anglais).

SCHWARTZ (L.) Théorie de la mesure. Cours oral I.H.P. (1968).

SION (M.). On uniformization of sets in topological spaces Tr. A.M.S. 96 (1960) 237-245.

STRASSEN (V.). The existence of probability measures with given marginals. Ann. Math. Stat. 36 (1965) 423-439.

UHL (J.J). The range of a vector valued measure. Proc. A.M.S. 23-1 (1969) 158-163.

VALADIER (M.)

[1] Représentation intégrale. I.R.I.A n° 6804 .

[2] Sur l'intégration d'ensembles convexes compacts en dimension infinie. C.R. 266 (1968) 14-16.

[3] Quelques propriétés des sous-gradients. I.R.I.A. n° 6833.

[4] Sous-différentiels d'une borne supérieure et d'une somme continue de fonctions convexes. C.R. 268 (1969) 39-42.

WARGA (J.). Unilateral variational problems with several inequalities. Michigan Math. J.12 (1965) 449-480.

WAZWSKI (T.) Sur une condition d'existence des fonctions implicites mesurables.
Bull. Ac. Pol. Sc. 9-12 (1961) 861-863.