Insuccès

(25 juin 2013)

Il me semble que je peux me décompter trois insuccès marquants : des problèmes qui ont (petitement mais quand même) défié quelques spécialistes, que je savais ouverts, que j'aurais aimé résoudre, et qui ont été résolus par d'autres.

1. À la fin des années 60 j'ai essayé de montrer l'existence en général d'un relèvement fort de L^∞. J'avais appris avec R. Pallu de La Barrière quelques notions sur les algèbres de Banach et le spectre de L^∞ ne me faisait pas peur (j'avais lu l'article de Dixmier sur les stoniens !). Je me souviens d'y avoir réfléchi dans l'appartement de la Butte aux Cailles. Mais le problème a été résolu négativement par Losert [L].

2. Au cours des années 80 J.J. Moreau, C. Castaing et moi avons pressenti que la rafle par un convexe (compact) dépendant continûment du temps et d'intérieur non vide devait avoir une solution BV. J'ai multiplié les tentatives (en particulier en attendant chez mon allergologue) mais c'est notre ami M.D.P. Monteiro Marques [MM] qui a craqué le problème[1].

3. Après avoir donné un premier cours d'école d'été sur les mesures de Young en 1989 (il y en a eu un second en 1993), je savais qu'il serait intéressant d'établir le théorème de semi-continuité inférieure fort-faible quand la troisième variable du lagrangien est une matrice carrée et que le lagrangien est quasi-convexe au sens de Morrey par rapport à cette variable. Comme moi E.J. Balder savait cette question ouverte. Le problème a été résolu par Kinderlehrer et Pedregal[2] [KP].

Plus précisément le problème de calcul des variations, minimiser

$$I \; : \; \begin{cases} u \longmapsto \displaystyle\int_0^T L(t, u(t), \dot{u}(t))\, dt \\ W^{1,1}(]0,T[; \mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R} \end{cases}$$

[1] Cependant, et ceci va contrebalancer mon élan de modestie, mon idée de majoration de la variation totale d'une solution ou d'une solution approchée par la longueur d'un arc de développante de cercle aura joué un rôle stimulant. Voir mon appendice dans [C, pp.24–26] qui donne une interprétation géométrique d'une majoration déjà donnée par Moreau.

[2] Je crois ne pas avoir consacré beaucoup de temps à ce problème parce que je ne savais pas par quel bout le prendre. Mais le résoudre eut été un succès.

a assez facilement une solution. Il suffit pour cela que I soit inf-compacte donc déjà semi-continue inférieurement. L'hypothèse clef à faire est la convexité des $L(t,\xi,.)$ (c'est quasiment une condition nécessaire). La théorie des mesures de Young permet de montrer assez facilement la semi-continuité inférieure *fort-faible* de

$$\begin{cases}(u,v) \longmapsto \displaystyle\int_0^T L(t,u(t),v(t))\,dt \\ L^1(]0,T[;\mathbb{R}^n) \times L^1(]0,T[;\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}\end{cases}$$

dont on déduit ensuite facilement la semi-continuité inférieure de I (*théorème fondamental du calcul des variations*). Le problème, autrement difficile, rencontré en élasticité non-linéaire est celui de la semi-continuité inférieure de

$$\begin{cases}\quad u \longmapsto \displaystyle\int_\Omega L(x,u(x),\nabla u(x))\,dx \\ W^{1,1}(\Omega;\mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}\end{cases}$$

où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$. Là l'hypothèse “naturelle” est la quasi-convexité des $L(x,\xi,.)$ au sens de Morrey.

Références

[L] Losert, V., *A measure space without the strong lifting property*, Math. Ann. **239** (1979), 119–128.

[C] Castaing, C., *Sur une nouvelle classe d'équation d'évolution dans les espaces de Hilbert*, Sém. Anal. Conv. **13** (1983), 10.1–10.28.

[MM] Monteiro Marques, Manuel D. P., *Rafle par un convexe semi-continu inférieurement d'intérieur non vide en dimension finie*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **299** (1984) 307–310.

[KP] Kinderlehrer, D. & Pedregal, P., *Characterizations of Young measures generated by gradients*, Arch. Rational Mech. Anal. **115** (1991), 329–365.