Lois non gaussiennes à marginales gaussiennes en dimension N

Michel Valadier

20 octobre 2013, référence [RS] ajoutée le 8 mars 2014

Soit N un entier ≥ 2. Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur $\mathbb{R}^N$. Pour i entre 1 et N soit (n'ayant pas à faire de calcul matriciel j'écris les vecteurs en ligne)

$$\pi_i = \begin{cases} (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_N) \mapsto (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_N) \\ \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^{N-1} \end{cases}$$

qu'on peut appeler *application oubli de la i-ième coordonnée*. Les *marges de dimension* $N-1$ *de* $\mathbb{P}$ sont les image de $\mathbb{P}$ par les π_i.

Le résultat suivant répond à une question posée dans [L]. L'argument est très simple et a dû être en dimension 2 donné dans tous les cours de probabilités. Cf. par exemple [V, p. 45].

Proposition 1 *Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité sur $\mathbb{R}^N$ ayant une densité f et dont les marges de dimension $N-1$ (l'entier i variant de 1 à N) sont gaussiennes. Il existe une loi de probabilité $\mathbb{Q}$ à densité, non gaussienne, ayant les mêmes marges de dimension $N-1$ que $\mathbb{P}$.*

Démonstration Si $\mathbb{P}$ n'est pas gaussienne il n'y a rien à démontrer. Supposons donc qu'elle soit gaussienne. Soit

$$m := \inf\{f(x)\,;\, x \in [-1,1]^N\}\,.$$

Noter que m est > 0. Définissons g comme f légèrement modifiée :

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{sur } \mathbb{R}^N \backslash [-1,1]^N \\ f(x) + \operatorname{sgn}\big(\Pi_{i=1}^N x_i\big)\, m & \text{sur } [-1,1]^N \end{cases}$$

Alors la fonction g est à valeurs ≥ 0. Elle est une densité qui définit $\mathbb{Q}$. Les marges $N-1$ dimensionnelles sont inchangées. En effet, par exemple pour $i = N$ la marge a pour densité

$$(x_1, \ldots, x_{N-1}) \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx_N = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx_N\,. \quad \square$$

Références

[L] Loisel, S., *A trivariate non-Gaussian copula having 2-dimensional Gaussian copulas as margins*, hal.archives-ouvertes docs/00/37/57/15/PDF/Loisel-ISFA-WP-2106 (2009). (Une version ultérieure contient en ajout la photocopie d'un passage de [RS] intitulé 2.12. Three pairwise independent, Gaussian random variables that are not trivariate Gaussian.)

[RS] Romano J. & Siegel A., *Counterexamples in probability and statistics*, Wadsworth & Brooks/Cole Advanced Books & Software, Monterey, CA, 1986.

[V] Valadier, M., *Probabilités* (polycopié), Université Montpellier II, Mathématiques, année 1999–2000.